

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Vedrana Markučić

Zagreb, 2013.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Ivo Džijan, dipl. ing.

Student:

Vedrana Markučić

Zagreb, 2013.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Ivi Džijanu na ukazanim savjetima, i dr. sc. Severinu Krizmaniću na pomoći pri izradi ovog rada. Također, zahvaljujem svojoj obitelji na potpunoj potpori tijekom dosadašnjeg dijela studija.

Vedrana Markučić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:
procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarški i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student:

Mat. br.:

Naslov rada na
hrvatskom jeziku:

Naslov rada na
engleskom jeziku:

Opis zadatka:

Zadatak zadan:

Rok predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Igor Balen

SADRŽAJ

SADRŽAJ	1
POPIS SLIKA	2
POPIS TABLICA.....	4
POPIS OZNAKA	5
SAŽETAK.....	7
1. UVOD.....	8
2. TEORIJSKE OSNOVE	10
2.1. Numerički pristup	10
2.1.2. Diskretizacija matematičkog modela	11
2.2. Računalna dinamika fluida.....	12
2.2.1. Postupak provođenja računalne numeričke simulacije	12
2.2.2. Prednosti i mane numeričkih simulacija	13
2.3. Osnovne jednačbe dinamike fluida	13
2.3.1. Zakon očuvanja mase ili jednačba kontinuiteta	13
2.3.2. Zakon očuvanja količine gibanja	14
2.3.3. Zakon momenta količine gibanja.....	14
2.3.4. Zakon očuvanja energije	14
2.4. Turbulencija	15
2.4.1. Statističko opisivanje turbulencije	17
2.4.2. Prijenos fizikalne veličine u turbulentnom strujanju	19
2.4.3. Disipacija energije	20
2.4.4. Vremenski osrednjene Navier – Stokesove jednačbe	21
2.4.5. Modeli turbulencije	22
2.4.6. $k - \varepsilon$ model turbulencije	23
2.4.7. Zidne funkcije	25
3. METODA KONAČNIH VOLUMENA	27
4. NUMERIČKA SIMULACIJA	33
4.1. Geometrija jedrilice Optimist.....	33
4.1.1. Kratka povijest jedrilice Optimist	33
4.1.2. Općenito o klasi optimist	34
4.1.3. Nacrt.....	34
4.2. 3D model.....	35
4.3. Domena proračuna i geometrijska mreža.....	41
4.4. Postavke numeričkih simulacija.....	48
5. PRIKAZ I ANALIZA REZULTATA	51
6. ZAKLJUČAK.....	65
LITERATURA.....	66
PRILOZI.....	67

POPIS SLIKA

Slika 1.	Rješavanje inženjerskih problema primjenom numeričkog pristupa	10
Slika 2.	Prijelaz iz laminarnog u turbulentno strujanje pri opstrujavanju ravne ploče.....	17
Slika 3.	Prijenos fizikalne veličine između konačnih volumena	28
Slika 4.	Numerička shema prvog reda točnosti	31
Slika 5.	Numerička shema drugog reda točnosti	32
Slika 6.	Bočna skica jedrilice Optimist	33
Slika 7.	Nacrt jedrilice Optimist preuzet iz časopisa Brodogradnja (Literatura: [8]).....	35
Slika 8.	3D model jedrilice Optimist	36
Slika 9.	Prikaz dijelova jedrilice Optimist.....	36
Slika 10.	Osnovne dimenzije prikazane na 3D modelu	37
Slika 11.	Bokocrt cjelokupnog 3D model pomoću kojeg su se izrađivali 3D modeli za razne istisnine i nagibe jedrilice	38
Slika 12.	3D model za 30 kg ravno uronjeno	39
Slika 13.	3D model za 60 kg ravno uronjeno	39
Slika 14.	3D model za 45 kg s nagibom 4 stupnja prema nazad (krma uronjenja)	39
Slika 15.	3D model za 45 kg s nagibom 1 stupanj prema naprijed (prova uronjenja)	40
Slika 16.	Prikaz vertikalne ravnine simetrije	41
Slika 17.	Prikaz horizontalne ravnine simetrije koja se poklapa sa slobodnome površinom vode	41
Slika 18.	Prikaz dimenzija domene proračuna - bokocrt	42
Slika 19.	Prikaz dimenzija domene proračuna - nacrt	42
Slika 20.	Geometrijska mreža cijele domene proračuna	43
Slika 21.	Geometrijska mreža za volumen neposredno uz trup jedrilice	44
Slika 22.	Mreža trupa jedrilice	44
Slika 23.	Mreža uronjenog dijela jedrilice - bokocrt	45
Slika 24.	Detaljni prikaz mreže kormila i krme jedrilice	45
Slika 25.	Detaljni prikaz mreže kobilice i dijela dna jedrilice.....	46
Slika 26.	Diskretizacija sloja uz površinu jedrilice na vertikalnoj ravnini simetrije	46
Slika 27.	Diskretizacija sloja uz površinu jedrilice na horizontalnoj ravnini simetrije	47
Slika 28.	Prikaz konvergencije sile otpora, slučaj 40kg ravno uronjeno.....	51
Slika 29.	Raspodjela y^+ za uronjeni dio jedrilice, pogled od naprijed za slučaj 45 kg ravno uronjen.....	52
Slika 30.	Raspodjela y^+ za uronjeni dio jedrilice, detalj kormila i krme, sa prikazanom mrežom za slučaj 45 kg ravno uronjen.....	52
Slika 31.	3D prikaz opstrujavanja uronjenog dijela jedrilice, gdje su strujnice u bojama vrijednosti apsolutne brzine za slučaj 45 kg ravno uronjen	53
Slika 32.	Prikaz polja apsolutne brzine i strujnica na ravninama simetrije, za slučaj 45 kg ravno uronjen.....	54
Slika 33.	Raspodjela koeficijenta tlaka C_p	55
Slika 34.	Raspodjela koeficijenta tlaka C_p , pogled s prednje strane	55
Slika 35.	Uvećani prikaz raspodjele koeficijenta tlaka C_p na prednjem dijelu kobilice i trupa	56
Slika 36.	Uvećani prikaz raspodjele koeficijenta tlaka C_p na prednjem dijelu kormila	56
Slika 37.	Ovisnost koeficijenta otpora C_D o masi jedriličara.....	58

Slika 38.	Ovisnost koeficijenta otpora C_D o nagibu jedrilice	58
Slika 39.	Ovisnost koeficijenta otpora o masi jedriličara	60
Slika 40.	Ovisnost koeficijenta otpora o nagibu jedrilice	60
Slika 41.	Tangencijalno naprezanje za 45 kg ravno uronjeno	61
Slika 42.	Tangencijalno naprezanje za 45 kg s nagibom 1 stupanj prema naprijed	62
Slika 43.	Usporedni prikaz koeficijenta tlaka za slučajeve: a) 45 kg ravno uronjeno; b) 45 kg s nagibom 1 stupanj prema naprijed	63
Slika 44.	Polje apsolutne brzine za 30 kg ravno uronjeno	64
Slika 45.	Polje apsolutne brzine za 45 kg s nagibom 4 stupnja prema nazad	64
Slika 46.	Polje apsolutne brzine za 45 kg ravno uronjeno	64
Slika 47.	Polje apsolutne brzine za 45 kg s nagibom 2 stupnja prema nazad	64
Slika 48.	Polje apsolutne brzine za 60 kg ravno uronjeno	64
Slika 49.	Polje apsolutne brzine za 45 kg s nagibom 1 stupanj prema naprijed	64

POPIS TABLICA

Tablica 1. Osnovne dimenzije jedrilice Optimist	34
Tablica 2. Raspon masa jedriličara i nagiba jedrilice	38
Tablica 3. Pregled masa i nagiba za sve modele	40
Tablica 4. Broj konačnih volumena	47
Tablica 5. Naziv (kratki opis) tablice	48
Tablica 6. Veličina i broj vremenskih koraka za shemu prvog reda točnosti	50
Tablica 7. Veličina i broj vremenskih koraka za shemu drugog reda točnosti	50
Tablica 8. Usporedba koeficijenata otpora i hidrodinamičke sile otpora za ravno uronjene slučajeve	57
Tablica 9. Usporedba koeficijenata otpora i hidrodinamičke sile otpora za slučajeve s nagibom jedrilice	57
Tablica 10. Usporedba koeficijenata otpora za slučajeve s ravnim uronom	59
Tablica 11. Usporedba koeficijenata otpora za slučajeve s nagibom jedrilice	59
Tablica 12. Površina uronjenog dijela krme	62

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
A	$[m^2]$	površina konačnog volumena
ΔA	$[m^2]$	površina stranice konačnog volumena
A_D	$[m^2]$	referentna površina za koeficijent otpora
a_C	$[kg/s]$	centralni koeficijent u diferencijskoj jednadžbi
a_N	$[kg/s]$	koeficijent u diferencijskoj jednadžbi
b	$[-]$	slobodni član u diferencijskoj jednadžbi
c_v	$[J/kg\ K]$	specifični toplinski kapacitet
C_D	$[-]$	koeficijent otpora
D	$[kg/s]$	jačina difuzije
e	$[J/kg\ K]$	specifična unutarnja i kinetička energija
F_n	$[kg/s]$	jačina konvekcije
f_i	$[N/kg]$	komponente vektora specifične masene sile
G	$[W/m^3]$	generacija kinetičke energije turbulencije
J_j	$[-]$	vektor fluksa fizikalnog svojstva
l_t	$[m]$	duljina puta miješanja čestica fluida u turbulentnom strujanju
\bar{k}	$[J/kg]$	kinetička energija turbulencije
p	$[N/m^2]$	tlak
\bar{p}	$[N/m^2]$	statistički osrednjeno polje tlaka
p'	$[N/m^2]$	pulzirajući dio polja tlaka
q_H	$[W/m^3]$	volumenska gustoća toplinskih izvora
Re	$[-]$	Reynoldsov broj
Re_{kr}	$[-]$	kritični Reynoldsov broj
Re_λ	$[-]$	turbulentni Reynoldsov broj
S_φ		izvorski član u općoj konveksijsko – difuzijskoj jednadžbi
T	$[K]$	temperatura
t	$[s]$	vrijeme
u	$[J/kg]$	specifična unutarnja energija
u_τ	$[m/s]$	brzina trenja
V	$[m^3]$	volumen konačnog volumena
v_i	$[m/s]$	komponente vektora brzine strujanja
\bar{v}_i	$[m/s]$	osrednjeni dio vektora brzine strujanja
v_i'	$[m/s]$	pulzirajući dio polja vektora brzine strujanja

v_n	[m/s]	projekcija vektora brzine u smjeru vanjske normale
v_∞	[m/s]	brzina neporemećenog strujanja
v_t	[m/s]	karakteristična brzina turbulentnih pulsacija
x_i	[m]	pravokutne koordinate
x_{kr}	[m]	kritična duljina
y^+	[-]	bezdimenzijska udaljenost prvog čvora od stijenke
δ	[-]	Kroneckerov simbol
Σ	[N/m ²]	Tenzor viskoznih naprezanja
λ	[W/m K]	toplinska provodnost materijala
λ	[m]	valna duljina turbulentnih pulsacija
ϕ	[-]	volumenska gustoća fizikalne veličine
φ	[-]	polje fizikalne veličine
Δn	[m]	udaljenost između čvorova konačnih volumena
Γ	[kg/m s]	koeficijent difuzije
Γ	[kg/m s]	koeficijent turbulentne difuzije
μ	[-]	dinamička viskoznost
μ_t	[-]	turbulentna viskoznost
$\overline{\varepsilon}$	[W/kg]	disipacija kinetičke energije turbulencije
τ	[N/m ²]	tenzor naprezanja
ρ	[kg/m ³]	gustoća
μ	[Pa s]	dinamička viskoznost
ν	[m ² /s]	kinematička viskoznost

SAŽETAK

Rad obuhvaća usporedbu utjecaja volumena istisnine i uzdužnog nagiba jedrilice na hidrodinamički otpor uronjenog dijela broda, pri čemu volumen istisnine i uzdužni nagib broda ovise o masi jedriličara te o poziciji jedriličara na jedrilici. Za klasu jedrilice Optimist, odabran je raspon masa jedriličara od 30 do 60 kg, i za srednju masu od 45 kg su odabrana tri različita nagiba jedrilice pri gibanju konstantnom brzinom od 1,5 m/s. Napravljen je 3D model koji je diskretiziran za svaki od slučajeva te je izrađena odgovarajuća mreža. Model s pripadajućom mrežom je učitao u računalni program 'Fluent' pomoću kojega je proveden numerički proračun za stacionarne uvjete strujanja uz zanemaren utjecaj valova. U radu su prikazana polja različitih fizikalnih veličina te je izvršena analiza i usporedba rezultata.

Ključne riječi: Računalna dinamika fluida; metoda konačnih volumena; hidrodinamička sila otpora broda; istisnina; nagib

1. UVOD

Brod mora biti projektiran tako da se omogući njegovo kretanje kroz vodu uz minimalnu vanjsku pomoć. Gibanja koja brod izvodi na površini proučava posebna grana znanosti koja se zove brodska hidrodinamika ili hidrodinamika broda.

U prošlosti je čovjek na razne načine pokušavao umanjiti otpor vode, takva su se iskustva prenosila s koljena na koljeno te su omogućila stvaranje sve boljih brodova. Taj je razvoj bio relativno spor, a znanstveni pristup tom problemu je novijeg datuma.

Početak analize mehanizama otpora pripada Isacu Newtonu, *Matematička načela prirodnih znanosti*, 1687. god. koji postavlja prve teorijske izraze za određivanje otpora. Leonhard Euler poznat kao osnivač teorijske hidrodinamike objavljuje 1749. god. radove u kojima izlaže znanstvene osnove teorije. Tijekom 18. st. razvija se teorija hidrodinamike i provode prvi pokušaji određivanja otpora broda na osnovi ispitivanja modela (Bird, D’Alambert). Pojavom parnog stapnog stroja u 19. st. brodska hidrodinamika se značajno razvija zbog potrebe određivanja pogonske snage parnog stroja. Prethodna saznanja nisu bila dovoljno pouzdana pa se metoda prognoziranja snage otpora koju je predložio W. Froude 1870. god. dalje razvijala i postala temeljem današnje svakodnevne prakse.

Brod u plovidbi izaziva poremećaje u svom okolišu, vodi i zraku. Mase vode i zraka opiru se njegovu gibanju. Otpor broda je sila potrebna za održavanje jednolike brzine plovidbe bez korištenja propulzora. Ako na podvodnom dijelu trupa nema nikakvih dodataka, onda se govori o otporu golog trupa (engl. bare-hull resistance), te se snaga potrebna za svladavanje tog otpora naziva efektivnom snagom (engl. effective power) ili snagom tegljenja (engl. tow-rope). Ukupni otpor sastoji se od:

- Otpora trenja - nastaje zbog kretanja trupa broda kroz viskozni fluid.
- Otpora valova - nastaje zbog formiranja sustava valova na površini mirne vode koji su posljedica promjena hidrodinamičkog tlaka uzduž broskog trupa.
- Otpora oblika - posljedica je razlike tlaka, a većim dijelom nastaje stvaranjem vrtloga na trupu broda. Lokalno vrtloženje javlja se oko isturenih dijelova broda i naglih prijelaza, gdje nije postignuto dobro opstrujavanje trupa.
- Otpora zraka - nastaje kretanjem nadvodnog dijela broda zrakom.

Jednadžbe koje se koriste pri rješavanju hidrodinamičkih problema su kompleksne, i nije ih moguće riješiti analitički, zato se koriste numerički principi računalne dinamike fluida u raznim računalnim programima. Vršiti se geometrijska diskretizacija domene strujanja na veliki broj konačnih volumena, a zatim se provodi diskretizacija diferencijalnih jednadžbi koje opisuju prijenos fizikalnih veličina na granicama konačnih volumena. Korištenje numeričkog rješavača sa sobom nužno donosi određenu pogrešku, čiji utjecaj ovisi o kvaliteti matematičkog modela i geometrijske diskretizacije. Stoga je najbolji pristup kombinacija numeričkih simulacija i eksperimentalnih ispitivanja. Međutim, takav pristup je i uvjerljivo najskuplji.

U ovom će se radu primjenom metoda računalne dinamike fluida, odrediti promjena sile otpora u ovisnost o istisnini i uzdužnom nagibu broda pri gibanju uronjenog dijela trupa jedrilice klase Optimist konstantnom brzinom, te će se zanemariti otpor valova i otpor zraka uvođenjem horizontalne ravnine simetrije umjesto slobodne površine.

2. TEORIJSKE OSNOVE

Poglavlje teorijskih osnova pokriva općenito područje o numeričkoj metodi i računalnoj dinamici fluida, u kojoj je sadržan kratki opis postupka provođenja numeričke simulacije, te osnovne prednosti i mane numeričkog rješavača. Zatim ukratko opisuje osnovne jednadžbe i matematički modeli numeričkog rješavača, te problem turbulencije u strujanju fluida.

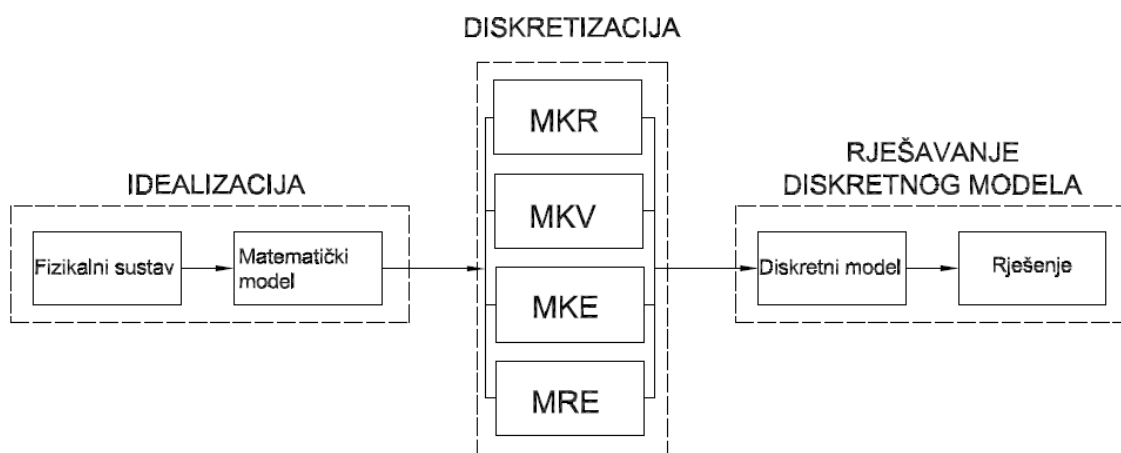
2.1. Numerički pristup

Numerički pristup je jedan od načina rješavanja inženjerskih problema, uz analitički i eksperimentalni pristup.

Numerički pristup daje približna rješenja diferencijalnih jednadžbi u konačnom broju točaka koje opisuju zadani model. Odstupanja numeričkog rješenja od egzaktnog su u većini slučajeva prihvatljiva za upotrebu u inženjerskoj praksi. Preduvjet za postizanje pouzdanog numeričkog rješenja je točna formulacija numeričke metode i matematičkog modela. Prednost ovog načina rješavanja problema je jednostavna promjena odgovarajućih parametra u numeričkim simulacijama što omogućuje lakše i brže postizanje optimalnog rješenja.

Postupak rješavanja inženjerskih problema primjenom numeričkih metoda sastoji se od tri faze [Slika 1]:

- idealizacija ili matematičko modeliranje
- diskretizacija matematičkog modela
- rješavanje sustava diskretiziranih jednadžbi



Slika 1. Rješavanje inženjerskih problema primjenom numeričkog pristupa

2.1.1. Idealizacija ili matematičko modeliranje

Idealizacija predstavlja opisivanje fizikalnog sustava pomoću određenog matematičkog modela. Cilj izrade matematičkog modela je što vjerniji opis problema uz što jednostavniji matematički zapis. Matematički model daje odnos između ulaznih i izlaznih veličina sustava, a može biti izveden varijacijskom formulacijom ili diferencijalnim jednadžbama.

Varijacijska formulacija temelji se na funkcionalu iz čijeg je uvjeta stacionarnosti moguće izvesti diferencijalne jednadžbe zajedno s odgovarajućim rubnim uvjetima.

Diferencijalna formulacija se sastoji od skupa diferencijalnih jednadžbi ovisnih o prostoru i/ili vremenu s odgovarajućim početnim i rubnim uvjetima.

Često je nemoguće izraditi apsolutno točan matematički model, pa se tako pristupa određenim aproksimacijama i zanemarivanju određenih parametara. Najčešća pretpostavka koja se koristi pri opisivanju strujanja fluida je da je fluid kontinuum, zamišljena tvar koja bi zadržavala svojstva i za infinitezimalno mali volumen. Također se pretpostavlja homogenost (jednakost fizikalnih svojstava u svim točkama fluida) i izotropnost (jednakost fizikalnih svojstava u svim smjerovima) fluida.

2.1.2. Diskretizacija matematičkog modela

Diskretizacija je postupak kojim se kontinuirani sustav zamjenjuje diskretnim sustavom koji je opisan s konačnim brojem nepoznatih varijabli. Razlikuju se diskretizacija područja, diskretizacija vremena i diskretizacija jednadžbi.

Diskretizacija područja predstavlja podjelu područja na konačni broj segmenata, diskretizacija vremena je podjela vremenskog kontinuuma na određeni broj vremenskih koraka dok je diskretizacija jednadžbi aproksimacija diferencijalnih jednadžbi sustavom algebarskih jednadžbi.

Neke od diskretizacijskih metoda su:

- Metoda konačnih razlika (MKR) – temelji se na diskretizaciji razmatranog područja pomoću točaka (čvorova) koje čine mrežu konačnih razlika
- Metoda konačnih volumena (MKV) – dijeli razmatrano područje pomoću konačnih ili kontrolnih volumena
- Metoda konačnih elemenata (MKE) – dijeli razmatrano područje na manje dijelove koje nazivamo konačnim elementima
- Metoda rubnih elemenata (MRE) – temelji se samo na diskretizaciji ruba promatranog područja

2.2. Računalna dinamika fluida

Računalna dinamika fluida (engl. Computational fluid dynamics, CFD) primjenom znanja i iskustava iz mehanike fluida uz izradu računalnih modela, pruža uvid u pojave unutar gibajućeg fluida.

Računalna dinamika fluida obuhvaća znatno šire područje od rješavanja problema dinamike fluida. Mogu se modelirati kemijski i termodinamički procesi u fluidima, gibanje čestica unutar fluida (sedimentacija), modeli biosustava (rast mikroflora i faune unutar vodotokova) itd. Primjena računalne dinamike fluida obuhvaća široki spektar problema povezanih sa gibanjem fluida u raznim granama znanosti i industrije.

2.2.1. Postupak provođenja računalne numeričke simulacije

Numerička simulacija se provodi kroz tri cjeline:

- predprocesor
- procesor
- postprocesor

Predprocesor je računalni program ili dio jedinstvenog programskog paketa u kojem se generira geometrijska mreža i definiraju rubni uvjeti proračuna. Pri generiranju mreže treba voditi računa o gustoći mreže, koja s jedne strane mora zadovoljavati računalne resurse, a s druge strane, mora biti dovoljno gusta da bi rezultati bili zadovoljavajući i kako bi se dobro opisale sve promjene polja fizikalnih veličina. Stoga je potrebna gušća diskretizacija u dijelu domene u kojem su veći gradijenti fizikalnih veličina. Budući da ne postoje algoritmi koji automatski generiraju mrežu na temelju geometrije područja i rubnih uvjeta proračuna, na korisniku je da, na temelju iskustva, pretpostavi približnu sliku strujanja i raspodjelu vrijednosti polja fizikalnih veličina, te provede diskretizaciju modela na takav način da zadovolji zahtjeve za točnošću proračuna i istodobno vodi računa o računalnim resursima.

Procesor numerički rješava problem pomoću programa gdje se može odabirati željeni matematički model koji se ne može proizvoljno mijenjati (programu ne omogućuje pristupi izvornom kodu) ili matematičkim modelom kojeg korisnik slobodno zadaje (program otvorenog koda). Nakon postavljanja svojstava određenog problema (rubnih uvjeta, inicijalizacije početnog rješenja, parametra sustava poput svojstava materijala, određivanja relevantnih jednadžbi), simulacija se računa dok se ne postigne konvergencija rješenja kroz određen broj iteracija ili vremenskih koraka.

Postprocesor je program koji služi za vizualizaciju rezultata proračuna, prikaz skalarnih, vektorskih i tenzorskih polja, integriranih veličina, te dijagramskog prikaza željenih veličina.

2.2.2. Prednosti i mane numeričkih simulacija

Glavna prednost numeričkih simulacija je skraćivanje vremena projektiranja ili razvoja novog proizvoda. Nakon generiranja geometrijske mreže modela, jednostavno se i brzo promjenom parametara sustava dobiva uvid u utjecaj pojedinog parametra na rezultate. Prednost je i količina informacija koju nam pruža numerički rješavač, dobiva se kompletna slika strujanja te gradijenti fizikalnih veličina u čitavoj domeni proračuna (polje brzine, temperature, tlaka itd.). Uzimajući u obzir dobivene rezultate, i uspoređujući ih s željenim rezultatima, moguće je mijenjati geometriju, ponovno vršiti proračun, nove rezultate uspoređivati sa starima, te tako brzo razvijati novi proizvod bez potrebe za izradom fizičkog modela za svaki prototip.

Primarni nedostatak računalnih simulacija je njegova ograničenost na probleme za koje postoji pouzdan matematički model, što ograničava modeliranje turbulentnog strujanja.

2.3. Osnovne jednadžbe dinamike fluida

Dinamika fluida temelji se na osnovnim zakonima fizike u koje spadaju zakon očuvanja mase, zakon očuvanja količine gibanja i zakon momenta količine gibanja, te zakon očuvanja energije i drugi zakon termodinamike. Osnovne jednadžbe dinamike fluida se definiraju za materijalni volumen, a primjenjuju za kontrolni volumen ili proizvoljni volumen.

Materijalni volumen se sastoji stalno od jednih te istih čestica fluida te je ekvivalentan tijelu u mehanici i zatvorenom termodinamičkom sustavu u termodinamici, dok se kontrolni volumen definira kao volumen nepromjenjivog položaja, oblika i veličine, a proizvoljni volumen je volumen koji može biti promjenjiv u vremenu.

2.3.1. Zakon očuvanja mase ili jednadžba kontinuiteta

Zakon očuvanja mase za materijalni volumen glasi: Brzina promjene mase materijalnog volumena jednaka je nuli.

Konzervativni oblik zakona očuvanja mase (jednadžbe kontinuiteta):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} = 0. \quad (1)$$

2.3.2. Zakon očuvanja količine gibanja

Zakon količine gibanja za materijalni volumen glasi: Brzina promjene količine gibanja materijalnog volumena jednaka je sumi vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen.

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j v_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (-p \delta_{ji} + \Sigma_{ji}) + \rho f_i, \quad (2)$$

gdje je prema Newtonovom zakonu viskoznosti za stlačivo strujanje uz zanemarenje volumenske viskoznosti fluida

$$\Sigma_{ji} = \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ji}.$$

2.3.3. Zakon momenta količine gibanja

Zakon momenta količine gibanja za materijalni volumen glasi: Brzina promjene momenta količine gibanja materijalnog volumena, u odnosu na odabrani pol, jednaka je sumi momenata vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen, u odnosu na taj isti odabrani pol. Ako se pretpostavi da u fluidu nema momenata raspodijeljenih po površini materijalnog volumena ili unutar samog volumena, tada se zakon očuvanja momenta količine gibanja svodi na činjenicu simetričnosti tenzora naprezanja $\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$.

2.3.4. Zakon očuvanja energije

Zakon očuvanja energije za materijalni volumen glasi: Brzina promjene zbroya kinetičke i unutarnje energije materijalnog volumena jednaka je snazi vanjskih masenih i površinskih sila koje djeluju na materijalni volumen, te brzini izmjene topline materijalnog volumena s okolinom.

$$\frac{\partial(\rho c_v T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c_v v_j T)}{\partial x_j} = -p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \Sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + q_H, \quad (3)$$

gdje je q_H volumenska gustoća toplinskih izvora. Jednadžba (3) je izvedena uz primjenu kaloričke jednadžbe stanja i Fourierovog zakona toplinske vodljivosti.

Formulacija osnovnih fizikalnih zakona za materijalni volumen često nije pogodna za primjenu u praksi, budući da inženjera uglavnom ne zanimaju promjene fizikalnih veličina u nekom gibajućem materijalnom volumenu. Polaznu osnovu za metodu konačnih volumena čine oblici osnovnih zakona za kontrolni volumen, stoga se za preformuliranje osnovnih

jednadžbi dinamike fluida za materijalni volumen u jednadžbe za kontrolni volumen koristi Reynoldsov transportni teorem.

- a) slučaj mirujućeg ($u_j = 0$) kontrolnog volumena V_{KV} koji je ograden mirujućom kontrolnom površinom S_{KV} :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \phi dV = \frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \phi dV + \int_{S_{KV}} \phi v_j n_j dS, \quad (4)$$

- b) slučaj promjenjivog kontrolnog volumena V čija se granica S giba brzinom u_j :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_M(t)} \phi dV = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi dV + \int_{S(t)} \phi (v_j - u_j) n_j dS. \quad (5)$$

U gornjim jednadžbama (4) i (5) prvi član predstavlja brzinu promjene sadržaja ϕ u materijalnom volumenu V_M , drugi član predstavlja brzinu promjene sadržaja ϕ u kontrolnom volumenu a treći član predstavlja protok ϕ kroz kontrolnu površinu. Veličina ϕ označava volumensku gustoću fizikalne veličine.

2.4. Turbulencija

Turbulencija (lat. turbulentus = nemiran, uzburkan) je nepravilno vrtložno gibanje fluida. Turbulentna strujanja u prirodi su sveprisutna, od strujanja u unutrašnjosti bioloških ćelija, cirkularnog i respiratornog sustava živih bića, strujanja vode u rijekama, do strujanja zraka (vjetra) što utječe na prijenos topline, razdiobu vodene pare i prašine u atmosferi (što uzrokuje padaline). Neki od tehničkih problema u kojima je strujanje turbulentno su strujanje zraka oko automobila, aviona ili vlaka, strujanje vode oko brodskog trupa, strujanje u vodovodnim, plinovodnim i drugim cijevnim mrežama.

Unatoč tolikoj rasprostranjenosti i učestaloj pojavi, problem turbulentnog strujanja ostaje i dan danas bez egzaktnog rješenja. Usprkos značajnom proučavanju turbulencije i dalje ne razumijemo detaljno kako i zašto se turbulencija pojavljuje, niti smo u stanju predvidjeti turbulentno ponašanje.

Strujanja se mogu podijeliti na dvije kategorije ovisno o vrijednostima Reynoldsovog broja. Reynoldsov broj je bezdimenzijski broj koji prikazuje omjer inercijskih i viskoznih sila u strujanju fluida:

$$Re = \frac{v \cdot x}{\nu}, \quad (6)$$

gdje v označuje brzinu strujanja fluida, x karakterističnu duljinu, a ν kinematičku viskoznost fluida.

Laminarno strujanje se javlja pri niskim vrijednostima Reynoldsovog broja, kada su viskozne sile dominantne naspram inercijskih, i karakterizira ga uredno gibanje čestica fluida, za razliku od turbulentnog strujanja.

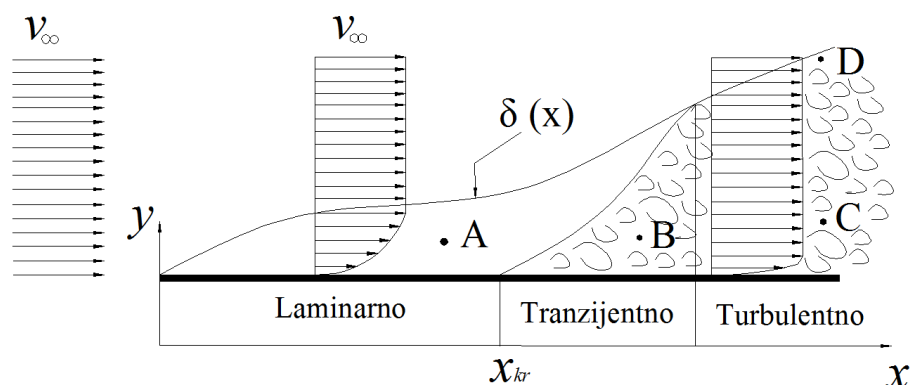
Turbulentno strujanje je izrazito nestacionarno strujanje, koje se javlja pri visokim vrijednostima Reynoldsovog broja, kada su inercijske sile dominantne nad viskoznim, karakteriziraju ga slučajne pulsacije brzine i tlaka, te intenzivno miješanje fluida na razini čestica. Intenzivno miješanje na nivou čestica daje turbulentnom strujanju difuzijski karakter čija je posljedica povećana disipacija energije. Za turbulentno strujanje karakteristično je da pored srednje brzine cijelog strujanja, svaka čestica fluida ima još i dodatnu brzinu koja može biti djelomično u smjeru glavnog strujanja, djelomično poprečna na smjer strujanja.

Laminarno nestlačivo strujanje fluida konstantnog koeficijenta viskoznosti može se opisati sustavom Navier Stokesovih jednadžbi – jednadžbom kontinuiteta i jednadžbom količine gibanja.

Ispitivanje stabilnosti rješenja Navier-Stokesovih jednadžbi, a samim time i ispitivanje klasifikacije strujanja fluida, vrši se dodavanjem male vremensko - prostorne perturbacije (nametnuti mali harmonički poremećaj) polja brzine i polja tlaka na dobiveno stacionarno rješenje. Ako poremećaji slabe u vremenu, strujanje je stabilno i stacionarno, te je strujanje laminarno. Ukoliko poremećaji ne slabe, već se pojačavaju, strujanje postaje nestacionarno, bez obzira na stacionarne rubne uvjete i postupno dobiva kaotičan karakter, te je takvo strujanje turbulentno. Turbulentno strujanje fluida ima unutrašnje stupnjeve slobode, jer je nestacionarno za stacionarne rubne uvjete pa analitičko opisivanje takvog strujanja nije moguće.

Kritičan Reynoldsov broj je broj kod kojeg se pojavi prva perturbacija koja ne slabi u vremenu, te tada počinje proces tranzicije laminarnog u turbulentno strujanje. Kritičan Reynoldsov broj nije univerzalna veličina, njegova vrijednost ovisi o uvjetima strujanja, geometriji opstrujavajućeg tijela, pobudama u obliku vibracija itd. Donji kritični Reynoldsov broj je vrijednost ispod koje se, za određeni oblik strujanja, ne pojavljuju slučajne pulsacije fizikalnih veličina, odnosno ne pojavljuje se turbulentno strujanje. Gornja kritična vrijednost Reynoldsovog broja je vrijednost iznad koje se ne može održati laminarno strujanje. Te se vrijednosti mogu dobiti samo u laboratorijskim uvjetima gdje se bilo kakve pobude, koje inače postoje u realnim strujanjima, neutraliziraju.

Na slici [Slika 2] prikazano je opstrujavanje ravne ploče. Na samom početku, gdje je Reynoldsov broj manji od donje kritične vrijednosti, vlada laminarno strujanje. U presjeku $x = x_{kr}$, kada Reynoldsov broj poprimi kritičnu vrijednost $Re_{kr} = \frac{v_{\infty} x_{kr}}{\nu}$, pojavljuju se nestabilnosti. Daljnjim udaljavanjem od tog presjeka u smjeru strujanja pulsacije postaju sve izraženije, te nakon nekog presjeka vlada potpuno turbulentno strujanje.



Slika 2. Prijelaz iz laminarnog u turbulentno strujanje pri opstrujavanju ravne ploče

I u laminarnom i u turbulentnom strujanju prisutno je područje u neposrednoj blizini tijela, u kojem se brzina fluida mijenja od nule (na samoj površini tijela, zbog viskoznosti fluida koji se lijepi za stijenku), do brzine neporemećenog strujanja. To područje naziva se graničnim slojem, unutar kojeg se ni u turbulentnom strujanju, gdje su inercijalne sile dominantne nad viskoznom, ne mogu zanemariti viskozne sile. Ipak, zbog izraženije difuzije, koja ima tendenciju ujednačavanja profila, u turbulentnom strujanju profil brzine će biti ujednačeniji, pa će, zbog izraženijeg gradijenta brzine na stijenci, biti veće i smično naprezanje.

2.4.1. Statističko opisivanje turbulencije

Zbog prirode turbulentnog strujanja, pri numeričkom rješavanju Navier – Stokesovih jednadžbi za slučaj razvijenog turbulentnog strujanja, diskretizacija proračuna bi morala biti tako sitna da se obuhvate sve amplitude pulsacija fizikalnih veličina, a vremenski korak integracija bi morao biti tako mali da se obuhvate sve frekvencije turbulentnih pulsacija. Takva vrsta izračuna dala bi jako veliki broj rezultata što bi bilo problematično sa stajališta brzine računanja i kapaciteta današnjih računala, te takvi proračuni nisu nužni kako bi se riješio problem turbulentnog strujanja.

Inženjere najčešće zanimaju prosječne vrijednosti fizikalnih veličina, integralne veličine poput protoka, naprezanja na nekoj površini itd. Zato se obično koristi uprosječivanje Navier – Stokesovih jednadžbi po vremenu. Time se značajno olakšava zadaća numeričkog rješavanja tih jednadžbi, bez da se gubi na točnosti rješenja. Danas se najčešće koristi Reynoldsovo osrednjavanje, prema kojem se neka veličina (tlak, brzina) u turbulentnom strujanju može prikazati kao zbroj vremenski osrednjene vrijednosti i pulsirajućeg dijela. Vremenski osrednjena vrijednost u razdoblju T_0 glasi:

$$\bar{y}(x_i, t) = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(x_i, t - \tau) \cdot d\tau, \quad (7)$$

gdje T_0 mora biti odabran tako da vrijedi $\bar{\bar{y}} = \bar{y}$. Vremenski osrednjena vrijednost pulsirajućeg dijela bilo koje fizikalne veličine jednaka je nuli.

Primjenom Reynoldsovog osrednjavanja na opći oblik zakona očuvanja za nestlačivo strujanje ($\rho = \text{konst.}$):

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j \varphi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + S_\varphi, \quad (8)$$

gdje φ predstavlja polje fizikalne veličine, Γ koeficijent difuzije (primjer – toplinska provodnost materijala λ kod kondukcijskog prijenosa topline kroz krutinu), a S_φ izvorski član, te uzevši da je koeficijent difuzije konstantan, polje brzine i specifično fizikalno svojstvo se prikazuju kao zbroj vremenski uprosječene vrijednosti i pulsirajućeg dijela, slijedi:

$$\frac{\partial(\rho\bar{\varphi})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_j\bar{\varphi})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j} - \rho\bar{v}_j'\bar{\varphi}' \right) + \bar{S}_\varphi, \quad (9)$$

gdje iščezavaju derivacije pulsirajućih dijelova fizikalnih veličina po vremenu, ali ostaje prisutan član $\frac{\partial(\rho\bar{v}_j'\bar{\varphi}')}{\partial x_j}$ kao predstavnik pulsirajućeg strujanja. Član $\rho\bar{v}_j'\bar{\varphi}'$ predstavlja novu

nepoznanicu, što znači da bi za nju trebalo definirati novu jednadžbu, ili je modelirati. Budući da bi se izvođenjem jednadžbe koja bi opisivala prijenos tog člana, pojavili novi članovi kao nepoznanice, te bi kao rezultat dobili još više nepoznanica, potrebno je taj član modelirati. Prema tome, statistički opis turbulencije ne daje egzaktna rješenja.

2.4.2. *Prijenos fizikalne veličine u turbulentnom strujanju*

Prijenos fizikalne veličine u strujanju fluida odvija se putem konvekcije, pri čemu čestica fluida koja je nositelj fizikalnog svojstva (npr. količine gibanja, unutarnje energije) svojim premještanjem prenosi fizikalno svojstvo, i putem difuzije.

Difuzija je proces prijenosa fizikalne veličine u strujanju fluida koji je posljedica kaotičnog gibanja atoma i molekula po prostoru. Makroskopski gledano, difuzija se pojavljuje u slučaju postojanja gradijenta fizikalne veličine i odvija se u smjeru od područja s višom vrijednosti fizikalne veličine prema području s manjom. Za razliku od konvekcije, koja omogućava prijenos fizikalne veličine samo u smjeru strujanja, difuzija omogućava prijenos i okomito na smjer strujanja. Na taj način je omogućen prijenos npr. topline u laminarnom strujanju fluida okomito na strujnicu uz uvjet da je toplinska provodnost fluida veća od nule. Kod turbulentnog strujanja dolazi i do prodiranja čestica fluida s različitim vrijednostima fizikalnog svojstva iz jednog sloja u drugi čime se ostvaruje miješanje. Tako možemo reći da se difuzija sastoji od:

- molekularne difuzije - uslijed gibanja atoma i molekula po prostoru
- turbulentne difuzije - uslijed miješanja čestica fluida u turbulentnom strujanju.

Ako je toplinska provodnost fluida koeficijent difuzije (u Fourierovom zakonu toplinske provodnosti) za difuziju topline, onda je viskoznost koeficijent difuzije za količinu gibanja. Turbulentna difuzija ima porijeklo u konvektivnom prijenosu fizikalnog svojstva uslijed gibanja čestica u poprečnom smjeru u odnosu na smjer glavnog strujanja. Turbulentna difuzija je ovisna o viskoznosti fluida zbog koje nastaje smično naprezanje među slojevima fluida putem kojeg se prenosi količina gibanja s bržeg na sporiji sloj. Za turbulentnu difuziju količine gibanja odgovorna turbulentna viskoznost, koja uzrokuje turbulentna naprezanja.

Dakle, u realnim strujanjima su prisutne molekularna difuzija, uslijed viskoznosti fluida, i turbulentna difuzija, uslijed turbulentne viskoznosti fluida. Naravno, difuzija, turbulentna ili molekularna, postoji samo ako je prisutan gradijent polja fizikalne veličine. U razvijenom turbulentnom strujanju (pri intenzivnom miješanju čestica fluida) turbulentna difuzija može biti puno jača od molekularne.

Turbulentno naprezanje se modelira sljedećom relacijom:

$$-\rho \bar{v}_j' \bar{\varphi}' = \Gamma_t \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j}. \quad (10)$$

Ako se izraz uvrsti u vremenski osrednjenu jednadžbu općeg zakona očuvanja u nestlačivom strujanju, nastaje relacija:

$$\frac{\partial(\rho\bar{\varphi})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_j\bar{\varphi})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\Gamma + \Gamma_t) \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_j} \right) + \bar{S}_\varphi. \quad (11)$$

Zbroj koeficijenata molekularne i turbulentne difuzije se naziva koeficijent efektivne difuzije. Koeficijent molekularne difuzije Γ je svojstvo fluida, dok je koeficijent turbulentne difuzije Γ_t funkcija karaktera strujanja, te je u laminarnom strujanju jednak nuli.

2.4.3. Disipacija energije

Disipacija energije predstavlja pretvorbu mehaničke energije u unutarnju energiju. U turbulentnom strujanju je veći gradijent brzine na stijenci nego u laminarnom strujanju, što za posljedicu ima da će i tangencijalno naprezanje na stijenci u turbulentnom strujanju biti veće nego u laminarnom strujanju. Proporcionalno povećanju tangencijalnog naprezanja raste i disipacija energije što je vidljivo iz Darcy–Weissbachovog izraza za pad tlaka pri strujanju u cijevima, koji glasi:

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{v_{sr}^2}{2} \quad (12)$$

Kako je u laminarnom strujanju faktor trenja jednak

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} = \frac{64\nu}{v_{sr}D}, \quad (13)$$

pad tlaka će biti linearno razmjern srednjoj brzini strujanja, što kod turbulentnog strujanja nije slučaj. U režimu potpuno izražene turbulencije faktor trenja je konstantan što se lako može primijetiti iz Moodyjevog dijagrama. Iz toga slijedi da će pad tlaka u režimu potpuno izražene turbulencije biti razmjern kvadratu srednje brzine. Isti zaključak vrijedi i pri optjecanju tijela, gdje definiramo koeficijent otpora:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S}. \quad (14)$$

Jednadžba (14) govori o sili otpora, odnosno o snazi potrebnoj za gibanje tijela kroz mirujući fluid (to je snaga potrebna za svladavanje sile otpora, koja se predaje fluidu, a u konačnici se pretvara u unutarnju energiju fluida, što nazivamo disipacijom energije).

Pri optjecanju bilo kojeg tijela za slučaj niskih vrijednosti Reynoldsova broja (slučaj laminarnog strujanja) koeficijent otpora je oblika $C_D = \frac{\text{konst.}}{Re}$, gdje vrijednost konstante zavisi od oblika tijela. U tom je slučaju sila otpora razmjerna brzini optjecanja tijela.

Za slučaj razvijenog turbulentnog strujanja koeficijent otpora je približno konstantan, što znači da je sila otpora razmjerna kvadratu brzine optjecanja.

2.4.4. Vremenski osrednjene Navier – Stokesove jednadžbe

Promatrat ćemo nestlačivo turbulentno strujanje gdje ćemo zanemariti utjecaj masenih sila ($f_i \equiv 0$). Fizikalna polja brzine i tlaka ćemo prikazati zbrojem osrednjene vrijednosti i pulsirajućeg dijela:

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i, \quad p = \bar{p} + p'. \quad (15)$$

Jednadžba kontinuiteta glasi:

$$\frac{\partial(\bar{v}_j + v'_j)}{\partial x_j} = 0. \quad (16)$$

Osrednjavanjem jednadžbe dobije se jednadžba kontinuiteta za osrednjeno strujanje:

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0. \quad (17)$$

Budući da je jednadžba kontinuiteta linearna, pa za nju vrijedi princip superpozicije, zbroj jednadžbe kontinuiteta za osrednjeno i pulsirajuće strujanje jednak je jednadžbi kontinuiteta za ukupno strujanje. Obzirom da nas zanimaju samo osrednjene vrijednosti fizikalnih veličina nećemo promatrati jednadžbe za pulsirajuće strujanje. Jednadžba količine gibanja za osrednjeno strujanje glasi:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}'_j \bar{v}'_i) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \bar{v}'_i \bar{v}'_j \right]. \quad (18)$$

Skup vremenski osrednjenih jednadžbi naziva se Reynoldsovim jednadžbama, u kojima se javlja predstavnik pulsirajućeg strujanja $-\rho \bar{v}'_i \bar{v}'_j$, kojeg nazivamo turbulentnim ili Reynoldsovim naprezanjima. Tenzor Reynoldsovih naprezanja je simetrični tenzor s 6 nepoznanica:

$$-\rho \bar{v}'_i \bar{v}'_j = \begin{bmatrix} -\rho \bar{v}'_1 \bar{v}'_1 & -\rho \bar{v}'_1 \bar{v}'_2 & -\rho \bar{v}'_1 \bar{v}'_3 \\ -\rho \bar{v}'_2 \bar{v}'_1 & -\rho \bar{v}'_2 \bar{v}'_2 & -\rho \bar{v}'_2 \bar{v}'_3 \\ -\rho \bar{v}'_3 \bar{v}'_1 & -\rho \bar{v}'_3 \bar{v}'_2 & -\rho \bar{v}'_3 \bar{v}'_3 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Već je objašnjeno zbog čega se ovaj član ne opisuje pomoću jednadžbi, već se modelira, čime se gubi dio informacija koje sadrže Navier – Stokesove jednadžbe.

2.4.5. Modeli turbulencije

Zadatak modela turbulencije je usklađivanje broja jednadžbi i broja nepoznanica koje se javljaju u Navier – Stokesovim jednadžbama, modeliranjem člana pulsirajućeg strujanja pomoću poznatih parametara sustava. Modeli turbulencije se dijele s obzirom na red korelacije brzina, budući da se svakom novom korelacijom pojavljuje novi član brzine. Zahtjevi koji se nameću svakom modelu turbulencije su točnost, mogućnost rješavanja i jednostavnost, stoga viši model turbulencije ne mora nužno biti i bolji model, a budući da ima povećan broj članova koje treba modelirati, često nije i najtočniji. Modeli turbulencije temelje se na eksperimentalnim rezultatima.

U modelima prvog reda, modelira se dvojna korelacija brzina prema hipotezi Boussinesqa u obliku:

$$-\rho \overline{v'_i v'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}, \quad (20)$$

gdje je μ_t koeficijent turbulentne viskoznosti koji je funkcija uvjeta strujanja, a u laminarnom strujanju jednak je nuli. Modeli koji se temelje na gornjoj pretpostavci nazivaju se Newtonovskim modelima turbulencije, budući da su analogni s Newtonovim zakonom viskoznosti.

Uvrštavanjem hipoteze Boussinesqa u Reynoldsovu jednadžbu za količinu gibanja, dobiva se izraz:

$$\frac{\partial \rho \overline{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \overline{v}_j \overline{v}_i) = - \frac{\partial \left(\overline{p} + \frac{2}{3} \rho \overline{k} \right)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (21)$$

Ovim uvrštavanjem izgubile su se informacije o pulsirajućem strujanju, ali se pojavio problem modeliranja koeficijenta turbulentne viskoznosti.

Prema kinetičkoj teoriji plinova, molekularna viskoznost fluida proporcionalna je gustoći fluida, slobodnoj putanji molekula i karakterističnoj brzini gibanja molekula. Boussinesqova je ideja da se turbulentna naprezanja, koja su posljedica kaotičnog čestica fluida, modeliraju slično viskoznim napreznjima. Slijedi da se turbulentna viskoznost modelira slično molekularnoj viskoznosti fluida:

$$\mu_t = \rho l_t v_t, \quad (22)$$

gdje je l_t duljina puta miješanja čestica fluida u turbulentnom strujanju, a v_t karakteristična brzina turbulentnih pulsacija. Budući da ove dvije veličine nisu svojstvo fluida, već ovise o obliku strujanja, postoje razni modeli koji se razlikuju po definiciji te dvije veličine, a jedan od njih je i $k - \varepsilon$ model turbulencije, koji spada u diferencijalne modele s dvije jednačbe.

2.4.6. $k - \varepsilon$ model turbulencije

Ovaj model jedan je od najčešće korištenih modela turbulencije. Model se s dvije dodatne transportne jednačbe koristi za opisivanje turbulentnih svojstava strujanja fluida. Prva transportna varijabla je turbulentna kinetička energija k , a druga označuje disipaciju turbulentne kinetičke energije i definira se izrazom:

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}}, \quad (23)$$

Kinetička energija turbulencije k sadržana je u pulsacijama turbulentnih strujanja, a mjerenja su pokazala da je glavnina kinetičke energije turbulencije sadržana u pulsacijama velikih razmjera. Budući da se disipacija kinetičke energije vrši putem viskoznih sila, definira se Reynoldsov broj turbulentnih pulsacija:

$$Re_\lambda = \frac{\rho v_\lambda \lambda}{\mu}, \quad (24)$$

gdje je λ valna duljina pulsacija, a v_λ brzina pulsacija. Glavnina disipacije kinetičke energije vrši se kada je Reynoldsov broj pulsacija malen, tj. kada je utjecaj viskoznih sila značajan, a to se događa pri pulsacijama malih geometrijskih razmjera.

Skup jednačbi koji opisuje $k - \varepsilon$ model turbulencije za nestlačivo strujanje se sastoji od:

- jednačbe kontinuiteta

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (25)$$

- jednačbe količine gibanja

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{v}_j \bar{v}_i)}{\partial x_j} = \frac{-\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (26)$$

gdje \bar{p} označuje efektivni tlak, a $\mu_t = C_\mu \rho \frac{\bar{k}^2}{\varepsilon}$ je koeficijent turbulentne viskoznosti

- jednađbe za kinetičku energiju turbulencije

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{k}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{v}_j \bar{k}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right] + G - \rho \bar{\varepsilon}, \quad (27)$$

gdje je izraz za generaciju kinetičke energije turbulencije:

$$G = -\overline{\rho v_i' v_j'} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}. \quad (28)$$

- jednađbe za disipaciju kinetičke energije turbulencije

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{v}_j \bar{\varepsilon}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] + C_1 G \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} - C_2 \rho \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}}. \quad (29)$$

Prikazani model vrijedi za visoke vrijednosti Re_t , koji označava odnos između turbulentne i molekularne viskoznosti, kad su koeficijenti u gornjim jednađbama konstantni, i glase:

$$C_\mu = 0.09, \sigma_k = 1, \sigma_\varepsilon = 1.3, C_1 = 1.44, C_2 = 1.92. \quad (30)$$

2.4.7. Zidne funkcije

Budući da $k - \varepsilon$ model turbulencije vrijedi za visoke vrijednosti Re_t , tj. u onom području u kojem je koeficijent turbulentne viskoznosti dominantan nad koeficijentom molekularne viskoznosti, taj model neće biti primjenjiv u području u kojem turbulentna viskoznost nije dominantna. To područje se, osim u području u blizini točke zastoja, pa do razvoja turbulentnog strujanja, javlja i u graničnom sloju, u blizini nepropusne stijenke. Ovaj se problem rješava formulacijom posebnog modela turbulencije u području uz stijenku, ili definiranjem rubnih uvjeta na rubu do kojeg još uvijek vrijedi model. Prvi način se rijetko koristi, ponajviše zbog poteškoća do kojih se nailazi formulacijom posebnog modela turbulencije, kao što su zahtjevi za finoćom mreže. Za realizaciju drugog načina potrebno je definirati rješenja primjenjiva na područje uz nepropusnu stijenku, koje nazivamo zidnim funkcijama.

U neposrednoj blizini stijenke strujanje je paralelno sa stijenkom, pa slijedi da su tangencijalna naprezanja od komponente brzine koja je okomita na stijenku jednaka nuli:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] = \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad (31)$$

iz čega zaključujemo da je ukupno tangencijalno naprezanje konstantno, gledajući u smjeru okomito na stijenku i jednako naprezanju na stijenci.

U neposrednoj blizini stijenke zanemaruje se turbulentna viskoznost, te slijedi da je u tom području profil brzine linearan:

$$\bar{u} = \frac{\tau}{\mu} y, \quad (32)$$

a uvrštavanjem bezdimenzijskih veličina $u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}$, $y^+ = \frac{\rho u_\tau y}{\mu}$, gdje u_τ predstavlja brzinu

trenja, dobiva se:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}, \quad (33)$$

ili ako bezdimenzijski zapišemo jednadžbe (32), slijedi:

$$u^+ = y^+. \quad (34)$$

Nakon viskoznog podsloja, u kojem je molekularna viskoznost dominantna nad turbulentnom viskoznošću, slijedi prijelazni podsloj, unutar kojeg su ove dvije viskoznosti istog reda veličine, pa ni u njemu ne vrijedi $k - \varepsilon$ model turbulencije. Nakon prijelaznog podsloja dolazi inercijski podsloj, u kojem dominira turbulentna viskoznost i u kojem vrijedi

$k - \varepsilon$ model turbulencije. Kada se radi o optjecanju tijela, viskozni, prijelazni i inercijalni podsloj čine zajedno unutarnji dio graničnog sloja, koji se proteže do 15% ukupne debljine graničnog sloja.

Da bi pouzdano mogao koristiti $k - \varepsilon$ turbulentni model, moramo osigurati da se bezdimenzijska udaljenost prvog čvora mreže od stijenke nalazi u određenom rasponu vrijednosti. Ako je udaljenost prvog čvora od nepropusne stijenke prevelika te se čvor nalazi izvan graničnog sloja, turbulentni model će krivo izračunati veličine strujanja u blizini stijenke, što vodi do krive slike strujanja. S druge strane, ako je udaljenost prvog čvora od nepropusne stijenke premala i on se nalazi u viskoznom podsloju, rezultati će također biti pogrešni. Iskustva pokazuju da vrijednost bezdimenzijske udaljenosti prvog čvora od stijenke y^+ u rasponu od 30 do 600 daje dobre rezultate, s tim da je cilj doći što bliže vrijednosti 30. Stoga je jako bitno paziti na položaj prvog čvora do nepropusne stijenke u postupku kreiranja geometrijske mreže.

Smično naprezanje na stijenci se računa prema izrazu:

$$\tau = \rho u_\tau^2 = \rho u_\tau^2 \frac{u^+}{u^+} = \rho \frac{u_\tau}{u^+} \bar{u} = \frac{\rho \kappa C_\mu^{\frac{1}{4}} \sqrt{k}}{\ln(Ey^+)} \bar{u}, \quad (35)$$

gdje se veličine \bar{u} , \bar{k} i y^+ odnose na prvi čvor do stijenke, a E je konstanta integracije koja se javlja u izrazu za u^+ .

3. METODA KONAČNIH VOLUMENA

U programskim paketima za rješavanje problema računalne dinamike fluida metoda konačnih volumena predstavlja uobičajeni pristup, jer ima povoljnu upotrebu memorije i brzinu rješavanja, pogotovo kod većih problema te turbulentnih strujanja s visokim vrijednostima Reynoldsovog broja.

Metoda konačnih volumena je diskretizacijska metoda koja se koristi za predstavljanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u algebarskom obliku. Domena strujanja se dijeli na veliki broj konačnih volumena, u kojima se računaju vrijednosti polja fizikalnih veličina. Konačni volumeni moraju u potpunosti ispunjavati domenu strujanja i ne smiju se preklapati. Zakoni očuvanja ostaju zadovoljeni za svaki konačni volumen. Pri proučavanju nestacionarnih problema, gdje rješenje ovisi i o vremenu, proračun se dijeli u određen broj vremenskih intervala tj. vremenskih koraka.

Diferencijalni oblik zakona očuvanja fizikalnog svojstva φ glasi:

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j \varphi)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = S_\varphi \quad (36)$$

gdje s lijeve strane jednakosti:

- prvi član – označava lokalnu promjenu fizikalnog svojstva,
- drugi član – označava konvektivni prijenos fizikalnog svojstva,
- treći član – označava prijenos fizikalnog svojstva putem difuzije.

Drugi i treći član zajedno označavaju vektor fluksa J_j , tj. ukupni protok fizikalnog svojstva.

Član S_φ s desne strane označava izvorski član fizikalnog svojstva.

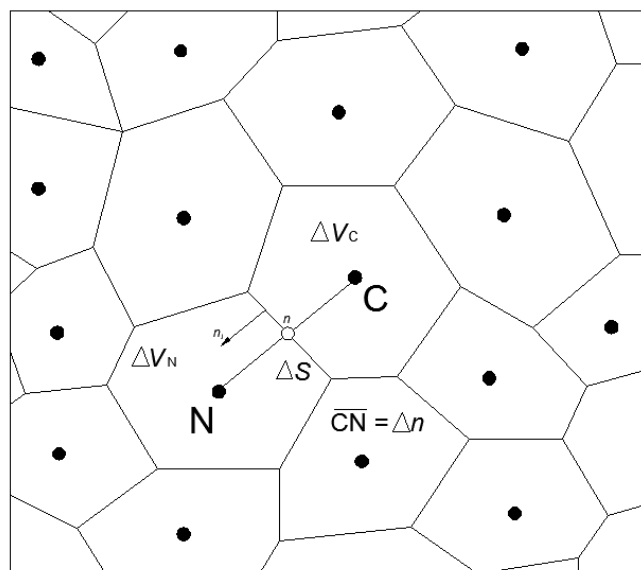
Ako gornju jednadžbu integriramo po konačnom volumenu, dobivamo:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho \varphi dV = - \int_{\Sigma \Delta S} \left(\rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS + \int_{\Delta V} S_\varphi dV, \quad (37)$$

gdje

- prvi član označava brzinu promjene sadržaja nekog fizikalnog svojstva φ u konačnom volumenu,
- drugi član je zbroj konvekcijskog i difuzijskog protoka sadržaja fizikalnog svojstva φ kroz granice volumena
- treći član označava izvor fizikalnog svojstva φ .

U jednadžbi (37) je protok fizikalnog svojstva definiran kao pozitivan kad se odnosi od konačnog volumena prema okolini, pa je jasno da će se uslijed takvog protoka, zbog minusa ispred integrala, sadržaj fizikalnog svojstva u konačnom volumenu smanjivati. Gornja jednadžba mora biti zadovoljena za svaki konačni volumen, što metodi konačnih volumena daje bitno svojstvo konzervativnosti.



Slika 3. Prijenos fizikalne veličine između konačnih volumena

Lokalna konzervativnost numeričkih flukseva znači da je numerički fluks fizikalnog svojstva konzervativan od jednog diskretiziranog volumena do njegovih susjeda. Ovo svojstvo čini metodu konačnih volumena posebno kompatibilnom s problemima u kojima je od velike važnosti vektor fluksa, kao što su mehanika fluida, ili prijenos topline i tvari.

Vrijednosti fizikalnih veličina se izračunavaju u čvorovima geometrijske mreže, koji se najčešće nalaze u težištu konačnog volumena.

Prvi član u jednadžbi (37) se pojednostavljuje uz pretpostavku da je konačni volumen dovoljno mali kako bi se fizikalno svojstvo φ aproksimiralo linearnom raspodjelom te uz uvjet da je točka C težište volumena ΔV vrijedi, iz čega slijedi:

$$\int_{\Delta V} \rho \varphi dV = \rho_C \Delta V. \quad (38)$$

Slično vrijedi i za integral izvorskog člana te se treći član jednadžbe (37) može aproksimirati sa:

$$\int_{\Delta V} S_\varphi dV = S_C \Delta V, \quad (39)$$

gdje je S_C srednja vrijednost izvorskog člana unutar volumena ΔV .

U jednadžbi (37) drugi član koji se sastoji od konvekcijskog i difuzijskog protoka sadržaja fizikalnog svojstva φ predstavlja ukupni vektor toka J_j , pri čemu protoku fizikalnog svojstva doprinosi samo normalna komponenta vektora toka $J_j \cdot n_j$:

$$\begin{aligned} J_j \cdot n_j &= \int_{\Delta S} \left(\rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS = \int_{\Delta S} \left(\rho v_n \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS \\ &= \left[\rho \left(\overline{v_n \varphi} \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_n \right] \Delta S. \end{aligned} \quad (40)$$

Također je provedeno osrednjavanje vrijednosti difuzijskog i konvekcijskog protoka po površini ΔS . Ako uvedemo bezdimenzijsku koordinatu $n = \frac{n}{\Delta n}$, gdje Δn označava udaljenost između čvorova konačnih volumena (udaljenost CN na slici [Slika 3]), i aproksimiramo vrijednost umnoška konvektivnog prijenosa umnoškom srednjih vrijednosti, dolazimo do relacije:

$$J_j n_j = \left(\rho \overline{v_n \varphi} \Delta S \right)_n \overline{\varphi}_n - \Gamma \frac{\Delta S}{\Delta n} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \bigg|_n = F_n \varphi_n - D_n \frac{\partial \varphi}{\partial n} \bigg|_n, \quad (41)$$

gdje je F_n maseni protok, odnosno jačina konvekcije kroz površinu stranice konačnog volumena ΔS , a D_n označava jačinu difuzije. Lokalni Pecletov broj predstavlja odnos inteziteta prijenosa fizikalne veličine konvekcijom i difuzijom te se definira kao

$Pe_\Delta = F_n / D_n$. Jasno je da se smanjenjem volumena smanjuje i Δn smanjuje i lokalni

Pecletov broj, što znači da difuzijski transport postaje utjecajni. U gornjim jednadžbama koriste se izrazi za srednju vrijednost fizikalne veličine na površini ΔS , dok se u samom numeričkom postupku računaju vrijednosti fizikalne veličine u čvorovima volumena. Da bi se pomoću vrijednosti u čvorovima volumena aproksimirale vrijednosti fizikalne veličine i njene usmjerene derivacije na stranicama konačnog volumena, koriste se sheme diferencije ili numeričke sheme.

Koristeći shemu diferencije koja koristi samo čvorne vrijednosti φ_C i φ_N aproksimiramo vrijednosti $\overline{\varphi_n}$ i $\left. \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial n} \right|_n$ te se jednadžba (41) može prikazati kao:

$$J_j n_j = F_n \overline{\varphi_n} - D_n \left. \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial n} \right|_n = F_n \varphi_C + a_N (\varphi_C - \varphi_N) \quad (42)$$

gdje je a_N koeficijent ovisan o shemi diferencije koja se koristi.

Ako se jednadžbe (38), (39) i (42) uvrste u jednadžbu očuvanja za konačni volumen prikazanu jednadžbom (37), dobiva se sljedeća relacija:

$$\rho \Delta V_C \frac{d\varphi_C}{dt} = -a_C \varphi_C + \sum_{nb=1}^{N_{nb}} [a_N \varphi_N]^{nb} + S_C \Delta V_C, \quad (43)$$

gdje je centralni koeficijent a_C suma koeficijenata prema susjednim čvorovima:

$$a_C = \sum_{nb=1}^{N_{nb}} [a_N]^{nb}. \quad (44)$$

Način prikazivanja izvorskog člana ovisi o metodi rješavanja diferencijalne jednadžbe. Ako se jednadžba rješava eksplicitnom metodom, izvorski član ostaje nepromijenjen, a ako se primjenjuje implicitna metoda, izvorski član se linearizira:

$$S_C \Delta V_C = a + b \varphi_C. \quad (45)$$

Dakle, diskretizacijom integrala i uvrštavanjem lineariziranog izvorskog člana dobije se linearna algebarska jednadžba očuvanja za konačni volumen. Ako se postupak ponovi za cijelo područje proračuna, dobije se sustav linearnih algebarskih jednadžbi. Broj jednadžbi odgovara broju nepoznanica – vrijednostima fizikalnih veličina u čvorovima konačnih volumena.

Taj se sustav jednažbi može matematički zapisati u obliku:

$$[A_{ji}][\varphi_i] = [b_j], \quad (46)$$

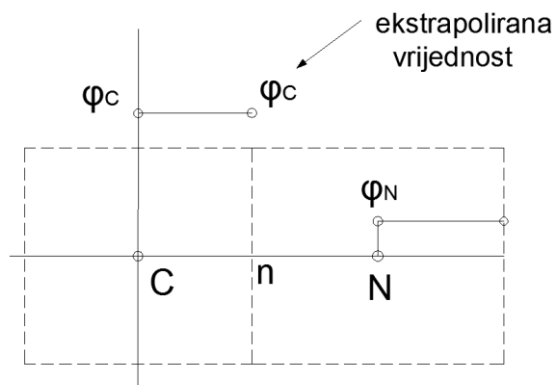
gdje je

- $[A_{ji}]$ matrica koeficijenata sustava koju čine koeficijenti koji se dobiju korištenjem određene sheme diferencije, pri čemu su koeficijenti a_c na glavnoj dijagonali
- $[\varphi_i]$ označava vektor nepoznanica, a $[b_j]$ označava vektor u kojeg ulaze sve poznate veličine.

Polje fizikalne veličine φ također mora zadovoljavati rubne uvjete, koji se ugrađuju u jednažbu s desne strane. Ako je izvorski član nelinearna funkcija od φ , rješavanje jednažbe zahtijevati će iterativni postupak, pa će se sustav linearnih jednažbi za svaki čvor kontrolnog volumena rješavati više puta unutar jednog vremenskog koraka.

Budući da ćemo u proračunu koristiti uzvodne sheme diferencije prvog i drugog reda, malo ćemo ih pobliže objasniti.

Uzvodna shema prvog reda točnosti (engl. First order upwind scheme) je najjednostavnija numerička shema. Pretpostavlja se da je vrijednost fizikalne veličine na stranici jednaka vrijednosti u čvoru konačnog volumena uzvodno.



Slika 4. Numerička shema prvog reda točnosti

Difuzijski transport je simetričan, pa se za njegovu diskretizaciju koristi shema centralnih razlika, koja daje najbolje rješenje, i glasi:

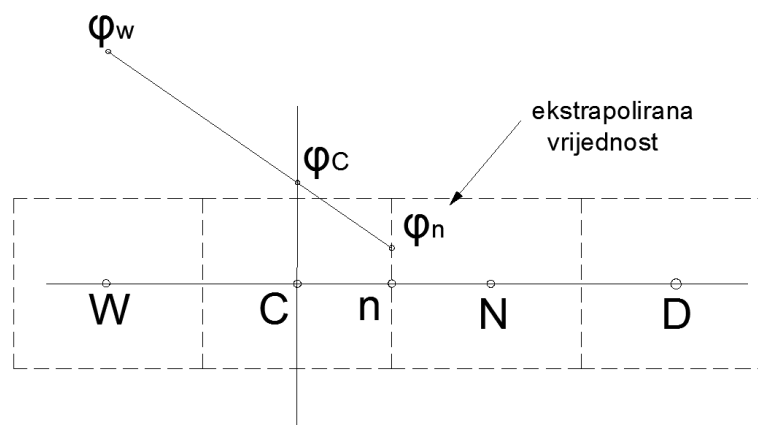
$$-D \frac{d\varphi}{dn} = -D(\varphi_N - \varphi_C). \quad (47)$$

Dakle, sheme će se razlikovati po modeliranju konvekcijskog transporta. Vrijednost fizikalne veličine φ na stranici se u uzvodnoj shemi prvog reda definira kao rješenje eksponencijalne

sheme, za vrijednost jačine difuzije $D = 0$. Vrijednost fizikalne veličine φ na stranici će biti jednaka vrijednosti u uzvodnom čvoru φ_C ako se prijenos fizikalnog svojstva putem konvekcije odvija od čvora C prema čvoru N. Ako se prijenos odvija u suprotnom smjeru, vrijednost fizikalne veličine na stranici biti će jednaka vrijednosti u uzvodnom čvoru φ_N .

Osnovna prednost ove sheme je jednostavnost implementacije i stabilna rješenja, i često je najbolja shema za početak proračuna. Nedostatak je što ova shema unosi lažnu difuziju u rješenje.

Uzvodna shema drugog reda točnosti (engl. Second order upwind scheme) određuje vrijednost fizikalne veličine φ na stranici (φ_n) s linearnom ekstrapolacijom vrijednosti iz dvaju čvorova uzvodno.



Slika 5. Numerička shema drugog reda točnosti

Difuzijski se transport definira shemom centralnih razlika, a izraz za konveksijski transport glasi:

$$\varphi_n = \begin{cases} \varphi_C + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_C^{\text{uzvodno}} = \varphi_C + \frac{1}{2} (\varphi_C - \varphi_W) & \text{za } F > 0 \\ \varphi_N + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_N^{\text{uzvodno}} = \varphi_N + \frac{1}{2} (\varphi_N - \varphi_D) & \text{za } F < 0 \end{cases}, \quad (48)$$

gdje se prvi način odnosi kada se transport odvija od čvora C prema N, tj. kada je F veći od nule, a drugi način kada se transport odvija od čvora N prema čvoru C, tj. kada je F manji od nule. Sheme drugog reda u područjima sa značajnim gradijentima fizikalnih veličina mogu davati rezultate koji su izvan limita vrijednosti u čvorovima, stoga je potrebno postaviti limitne vrijednosti na vrijednosti fizikalnih veličina na stranicama. Uzvodna shema drugog reda točnosti je numerička shema koja se često koristi zbog zadovoljavajućeg odnosa točnosti i stabilnosti.

4. NUMERIČKA SIMULACIJA

4.1. Geometrija jedrilice Optimist

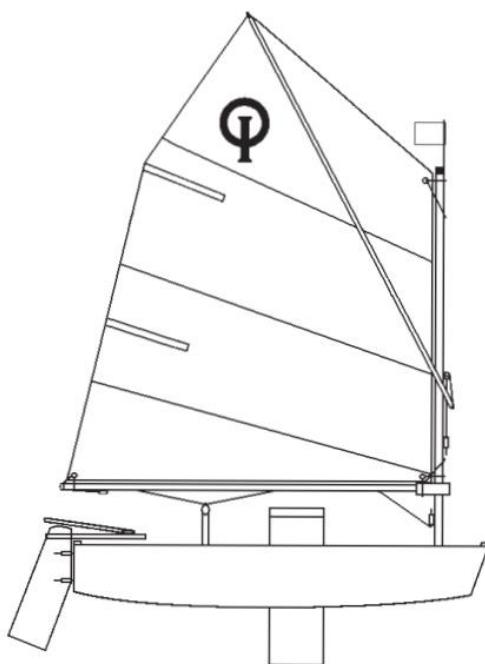
4.1.1. Kratka povijest jedrilice Optimist

Godine 1947. jedriličarski klub "Optimist" iz Clearwatera u Floridi (SAD) zamolio je Clarka Millsa da konstruira jedrilicu za odgoj podmladka. Konstrukciju je neznatno preuredio, zadao tolerancije i u Europu uveo Danac Axel Damsgaard, a iz Skandinavije se potom proširila čitavom Europom. Konstrukcija je standardizirana 1960. godine, a 1995. su postavljena stroga pravila u konstrukciji.

Prvo Svjetsko prvenstvo održano je u Velikoj Britaniji 1962. Tri godine kasnije sedam je država osnovalo Međunarodni savez klase Optimist (International Optimist Dinghy Association, IODA).

Tijekom sedamdesetih Optimist se proširio Europom, pa i šire sve do Azije, Afrike i Južne Amerike. Svjetska jedriličarska federacija (International Sailing Federation, ISAF) klasi je dodijelila međunarodni status 1973. Međunarodni savez klase Optimist (IODA) danas ima preko 60 članica, a procjenjuje se da je izgrađeno oko 250 000 Optimista.

U početku su jedrilice Optimist bile građene od drveta, a danas se uglavnom rade od stakloplastike, mada ih još uvijek neki izrađuju i od drveta.



Slika 6. Bočna skica jedrilice optimist

4.1.2. *Općenito o klasi Optimist*

Optimist je jednosjed idealan za djecu i prve korake u jedrenju, koji im istovremeno nudi i uzbuđenje pravih velikih regata, kao što su svjetska prvenstva. Djeca mogu jedriti u Optimistu do kraja kalendarske godine u kojoj su napunili 15 godina. Optimist je najbrojnija klasa u Hrvatskoj. Na kriterijskoj ljestvici klase krajem 2001. bilo je preko 300 jedriličara i jedriličarki.

Odabir raspona mase jedriličara za potrebe proračuna u ovome radu je predstavljao izazov zbog značajnih razlika masa dječaka i djevojčica u dobi od 7 do 15 godina starosti što obuhvaća raspon masa od 20-ak do 70-ak kilograma. Prema dostupnim informacijama iz literature [10] i priloga [Prilog II.] najzastupljenije su mase jedriličara u rasponu od 30 do 60 kg, te su navedene granice odabrane za promatrano područje proračuna. Za srednju masu od 45 kg odabrana su tri različita nagiba jedrilice na način da su odabrana dva nagiba kada je krma uronjenija što je puno češći slučaj, i jedan nagib kada je prova uronjenija.

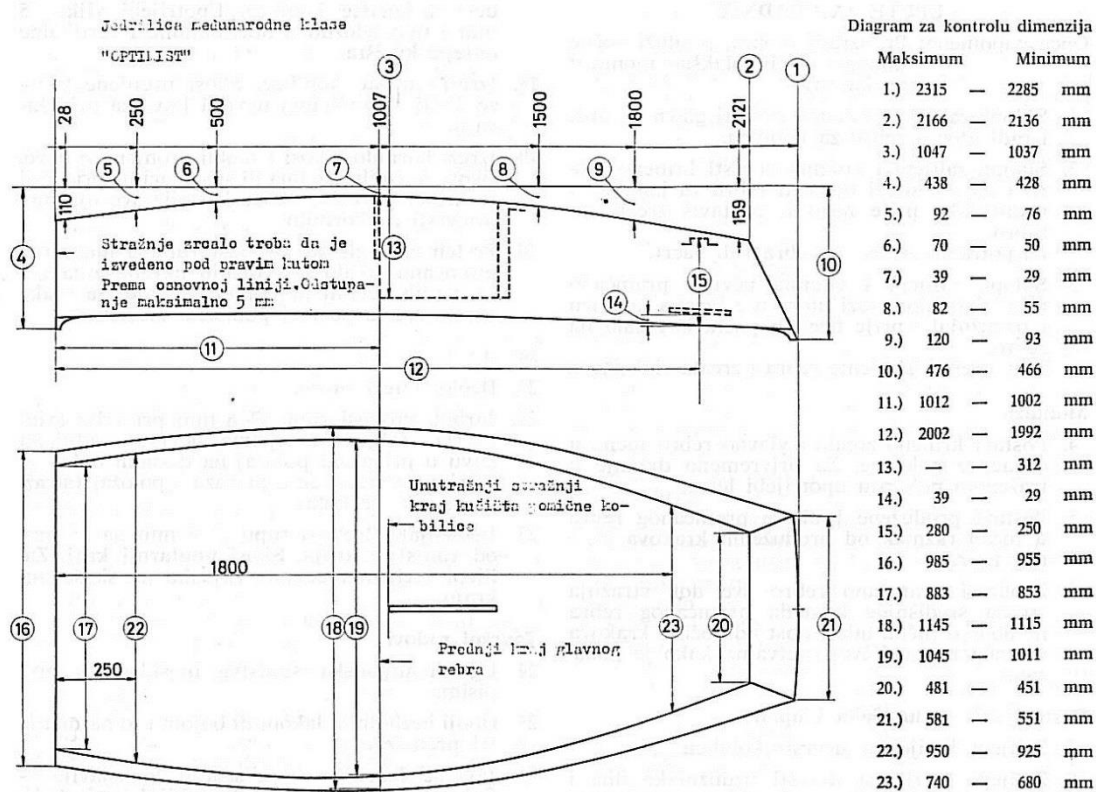
Za proračun je uzeta konstantna brzina od 1,5 m/s koja prema međunarodnom savezu jedriličara (ISAF) odgovara prosječnoj brzina jedrenja u klasi Optimist. Također je na službenoj internetskoj stranici Međunarodnog saveza klase Optimist (IODA) nađena kratka rasprava o tome postoji li idealna masa natjecatelja za klasu Optimist, koja se nalazi u prilogu [Prilog II.].

4.1.3. *Nacrt*

Unatoč činjenici da je autor nacрта Clark Mills nacрте 'poklonio Svijetu i ljudima', te postojanju međunarodne stranice International Sailing Federation (ISAF), gdje je dostupna povećana količina informacija poput pravila i regulacije klasa, sami nacrti jedrilice Optimist nisu dostupni na Internetu. Te je stoga korišten nacrt koji je objavljen u časopisu Brodogradnja, Srpanj 1973. Dio nacрта s osnovnim dimenzijama je skeniran i prikazan na slici [Slika 7], dok su u tablici [Tablica 1.] navedene neke od osnovnih dimenzija jedrilice Optimist.

Tablica 1. Osnovne dimenzije jedrilice Optimist

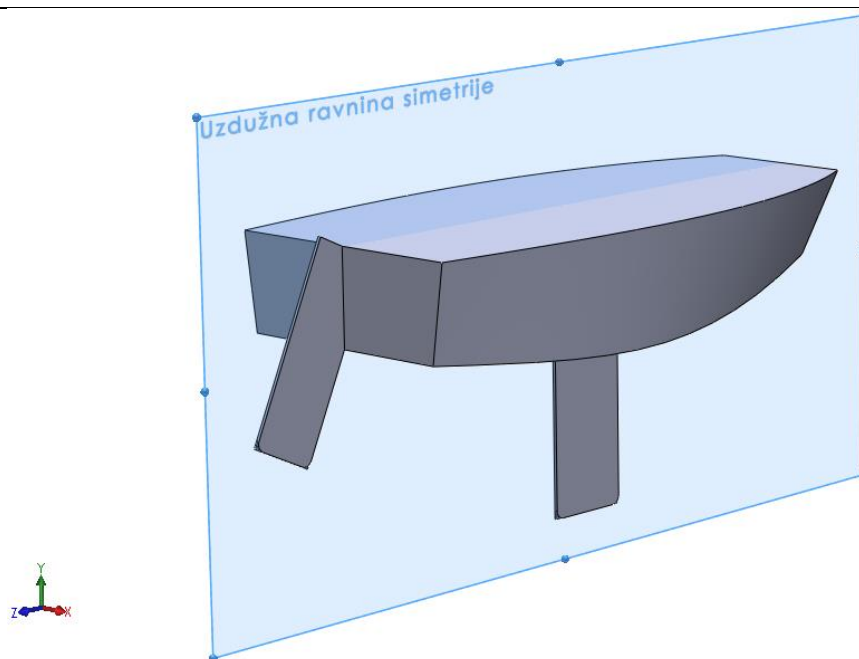
Dužina	2,30 m
Širina	1,13 m
Masa	35,00 kg
Površina jedra	3,25 m ²



Slika 7. Nacrt jedrilice Optimist preuzet iz časopisa Brodogradnja (Literatura: [8])

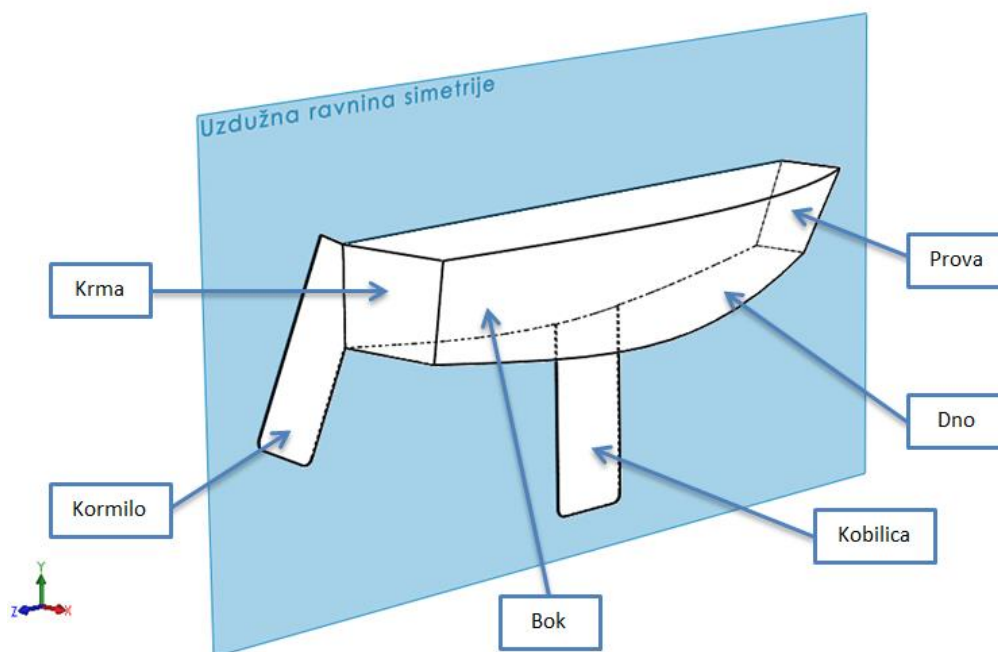
4.2. 3D model

U računalnom programu 'Solidworks' izrađen je prema nacrtima 3D model jedrilice Optimist. Jedrilica ima uzdužnu vertikalnu ravninu simetrije zbog čega je modelirano samo pola trupa jedrilice, što je prikazano slikom [Slika 9], te će takav model biti geometrijski diskretiziran i simuliran u računalnom programu 'Fluent'. U programima 'Solidworks' i 'Fluent' postoji opcija preslikavanja (mirror) tako da se lako dobije vizualizacija cijelog trupa jedrilice [Slika 8].

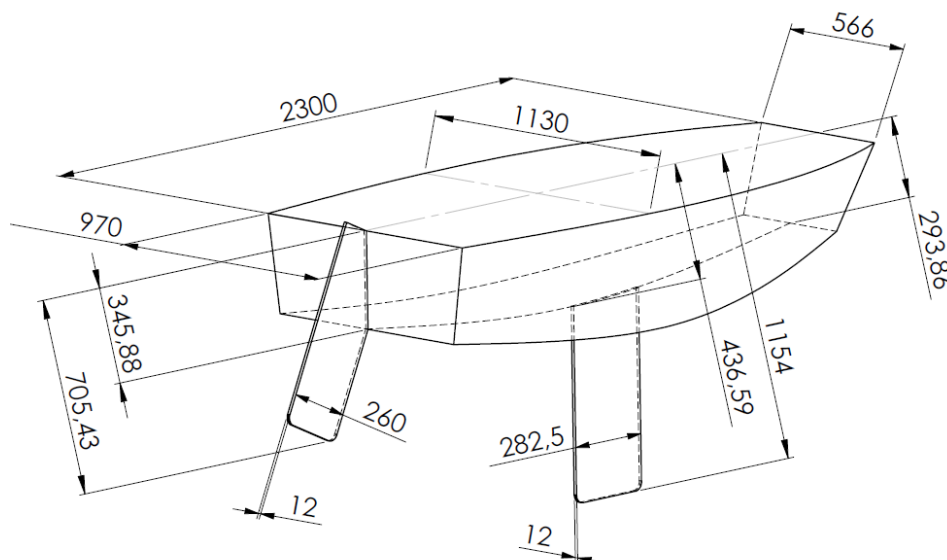


Slika 8. 3D model jedrilice Optimist

Imena dijelova jedrilice Optimist prikazane su na slici [Slika 9]. Trup jedrilice čine zajedno prova, krma, dno i bok jedrilice. Osnovne dimenzije 3D modela jedrilice su prikazane na slici [Slika 10].



Slika 9. Prikaz dijelova jedrilice Optimist



Slika 10. Osnovne dimenzija prikazane na 3D modelu

Treba napomenuti da je zbog jednostavnosti proračuna i ograničenih računalnih resursa sam model jedrilice optimist pojednostavljen, a dijelovi geometrije poput skošenja na kobilici i kormilu su izostavljeni. Zbog male debljine kobilice i kormila modeliranje skošenja bi zahtijevalo nesrazmjerno veliko povećanje broja konačnih volumena u odnosu na njihov utjecaj na strujanje.

Različiti volumeni istisnine i nagibi jedrilice u 3D modelu

Volumen istisnine označava volumen fluida koji brod istisne pri uranjanju u fluid te je zavisn o ukupnoj masi jedrilice (i svega što se u njoj nalazi) i gustoći fluida u koji je jedrilica uronjena. Budući da su masa cijele jedrilice Optimist i gustoća fluida poznati i konstantni, u ovom radu se volumen istisnine naznačuje iznosom mase jedriličara.

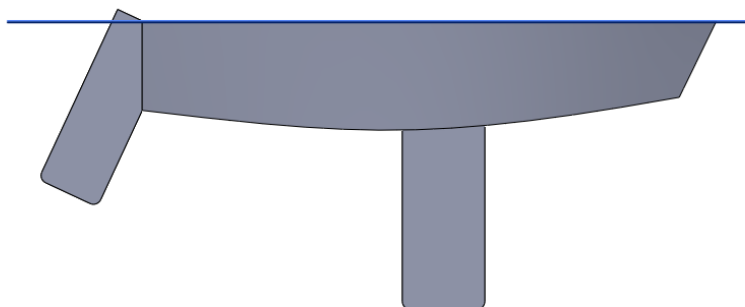
Kako je objašnjeno u poglavlju 4.1.2. odabran je raspon masa jedriličara od 30 do 60 kg., te su odabrana tri različita nagiba jedrilice za srednju masu jedriličara od 45 kg. Referentne nagibi jedrilice i mase jedriličara koje predstavljaju različite iznose volumena istisnine prikazani su u tablici ispod [Tablica 2.].

Tablica 2. Raspon masa jedriličara i nagiba jedrilice

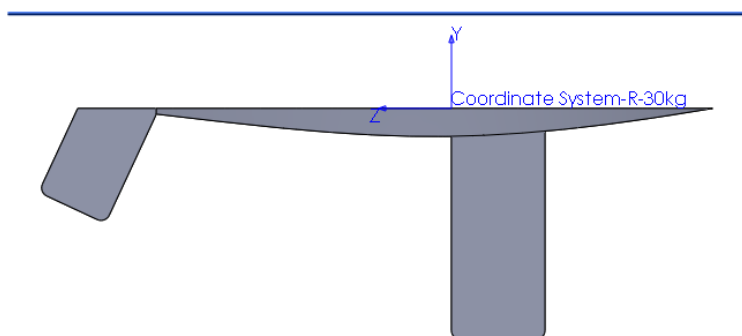
Masa jedriličara [kg]	Nagib jedrilice[°]
30	0
40	0
45	0
50	0
60	0
45	+ 1, prema naprijed
45	- 2, prema nazad
45	- 4, prema nazad

Za svaki od slučajeva je zasebno izrađen 3D model jedrilice u programu 'Solidworks'. Veličina ukupnog volumena istisnine uronjenog dijela jedrilice je određena ukupnom masom jedrilice i jedriličara. Iznos ukupnog volumena istisnine se računa pomoću opcije svojstva mase (engl. Mass properties) za zadanu konstantnu vrijednost gustoće $\rho = 1000 \text{ m}^3$.

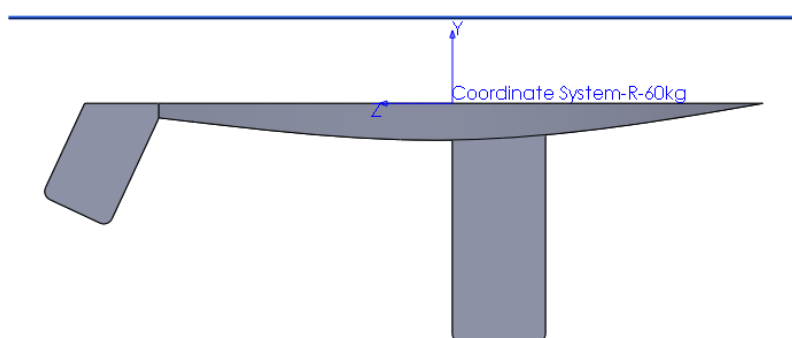
Bokocrt cjelokupnog 3D modela je prikazan na slici [Slika 11], taj se 3D model modificirao pomoću alata za rezanje s površinom (Cut With Surface) kako bi se izmodelirali različiti volumeni istisnine i nagibi jedrilice. Također je napravljen odgovarajući koordinatni sustav, za svaki od modela, kako bi se vodna linija uvijek poklapala s gornjom površinom izrezanog modela. Neki od modela različitih nagiba i istisnina su prikazani na slikama ispod [Slika 12 - Slika 15]. Na slikama gornja plava linija predstavlja horizontalnu ravninu (naziva Top plane) koja je referentna za izradu pomoćnih ravnina s kojima se izrezivao osnovni model.



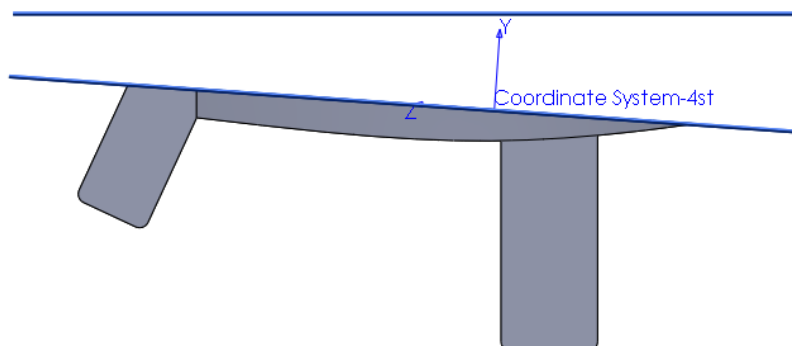
Slika 11. Bokocrt cjelokupnog 3D model pomoću kojeg su se izrađivali 3D modeli za razne istisnine i nagibe jedrilice



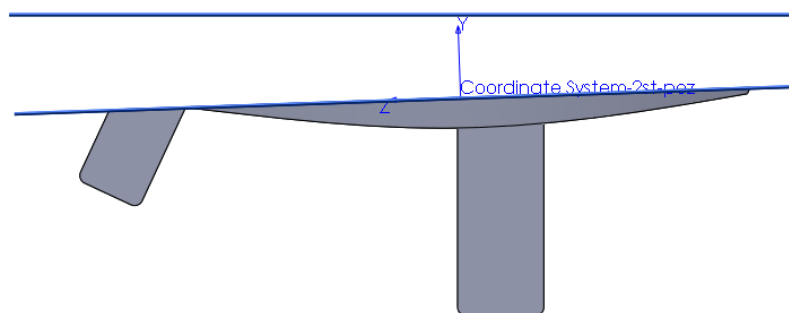
Slika 12. 3D model za 30 kg ravno uronjeno



Slika 13. 3D model za 60 kg ravno uronjeno



Slika 14. 3D model za 45 kg s nagibom 4 stupnja prema nazad (krma uronjenja)



Slika 15. 3D model za 45 kg s nagibom 1 stupanj prema naprijed (prova uronjenja)

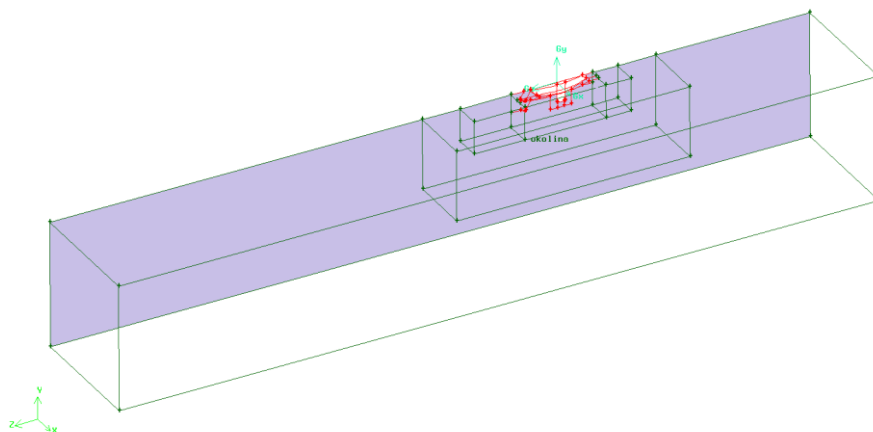
Tablica 3. Pregled masa i nagiba za sve modele

Naziv modela	Udaljenost ravnine za rezanje od Top plane-a [mm]	Zakret jedrilice [°]	Ukupna masa [kg]	Masa jedriličara [kg]
30 kg ravno uronjeno	338	0	65,33	30,33
40 kg ravno uronjeno	327	0	75,64	40,64
45 kg ravno uronjeno	322	0	80,4	45,4
50 kg ravno uronjeno	317	0	85,21	50,21
60 kg ravno uronjeno	307	0	95,00	60,00
45 kg s nagibom 4 st. prema nazad	331	- 4	80,27	45,27
45 kg s nagibom 2 st. prema nazad	325	- 2	80,84	45,84
45 kg s nagibom 1 st. prema naprijed	322	+ 1	80,48	45,48

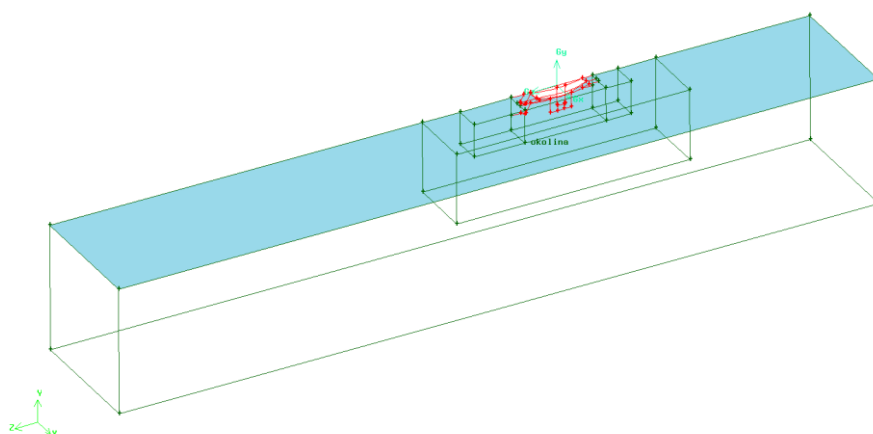
Kako je objašnjeno u poglavlju 2.2.1, numerička simulacija provodi se kroz tri cjeline: predprocesor, procesor i postprocesor. Mreža konačnih volumena izrađena je u računalnom programu 'Gambit', nakon čega je učitana u računalni program 'Fluent' gdje se odvija proračun strujanja fluida, a rezultati su prikazani u računalnom programu 'Tecplot'.

4.3. Domena proračuna i geometrijska mreža

Kako je već prije spomenuto model je pojednostavljen uvođenjem uzdužne vertikalne ravnine simetrije, a tekstom zadatka definirano je da se i slobodna površina vode smatra horizontalnom ravninom simetrije.



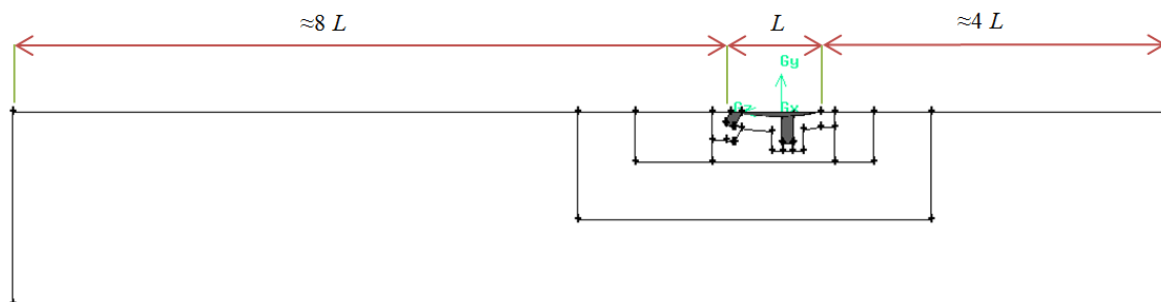
Slika 16. Prikaz vertikalne ravnine simetrije



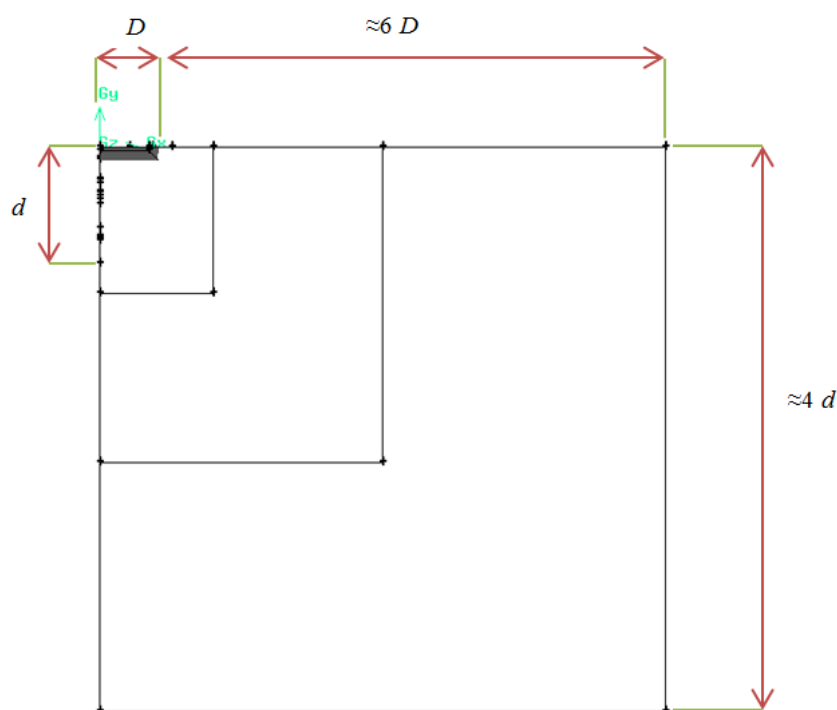
Slika 17. Prikaz horizontalne ravnine simetrije koja se poklapa sa slobodnom površinom vode

Dimenzije domene proračuna su višestruko veće od dimenzija jedrilice, jer je potrebno na granicama domene ostvariti uvjete što sličnije neporemećenom strujanju. Širina domene veća je od šesterostruke vrijednosti najšireg dijela trupa, a dubina je veća od deseterostruke vrijednosti najveće mjere dubine trupa jedrilice bez kobilice. Ako se za najveću mjeru po dubini uzima najdublji dio trupa s kobilicom tada je volumen okoline po dubini približno četiri puta veći. Duljina promatrane domene iznosi trinaest ukupnih duljina jedrilice, na način da su ispred jedrilice četiri duljine, a iza osam duljina trupa jedrilice. Sve su mjere za

određivanje veličine promatrane domene uzete s obzirom na ukupne dimenzije jedrilice, a ne dimenzije uronjenog dijela jedrilice.



Slika 18. Prikaz dimenzija domene proračuna - bokocrt



Slika 19. Prikaz dimenzija domene proračuna - nacrt

Za referentnu površinu uzima se projekcija naletne površine trupa na ravninu okomitu na smjer kretanja tj. strujanja. Iako je trup promjenjivog poprečnog presjeka, referentna površina je ujedno i najveća površina, te u ovom modelu iznosi $A_{ref} = 0,25 \text{ m}^2$ za pola promatranog trupa jedrilice.

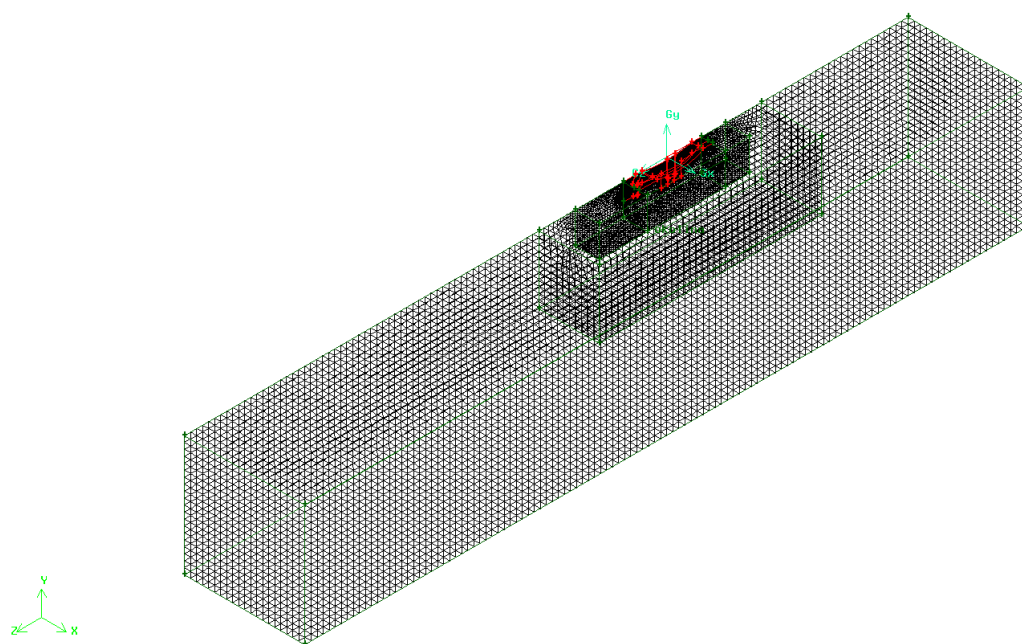
Omjer referentne površine naspram poprečnog presjeka domene proračuna predstavlja stupanj začepljenosti presjeka (engl. blockage factor) za koji je preporučeno:

$$\frac{A_{ref}}{A_{volumen\ okoline}} \leq 5\% \quad (49)$$

S obzirom da poprečni presjek promatranog volumena iznosi $A_{\text{volumen okoline}} = 25 \text{ m}^2$ gornja jednažba je zadovoljena, što je vidljivo:

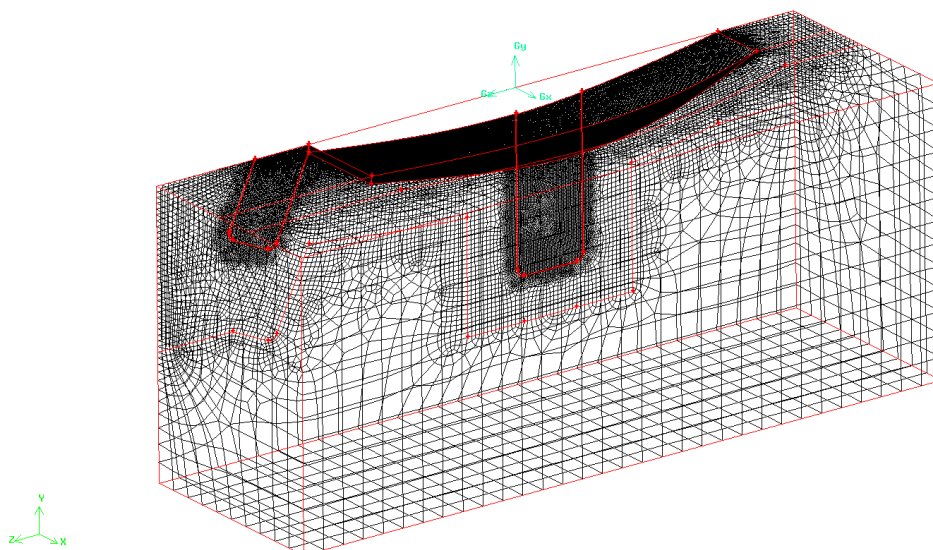
$$\frac{A_{\text{ref}}}{A_{\text{volumen okoline}}} = \frac{0,25}{25} = 0,01 = 1\% \leq 5\% . \quad (50)$$

Kako bi se smanjio ukupni broj konačnih volumena pri izradi mreže, područje proračuna ispunjeno vodom u koje je uronjen trup jedrilice, podijeljeno je na više podpodručja. Finija mreža je napravljena u području u kojem se očekuju veći gradijenti polja fizikalnih veličina. U volumenu neposredno uz trup jedrilice, diskretizacija je najfinija te je na tom području mreža najgušća. Mreža postepeno postaje sve rjeđa sa svakim idućim većim volumenom kao što je prikazano na slici [Slika 20]. Prostorna diskretizacija provedena je pomoću nestrukturiranih tetraedarskih konačnih volumena (Elements – Tet/Hybrid, Type - TGrid) i strukturiranih heksaedarskih konačnih volumena (Elements – Hex, Type - Submap).



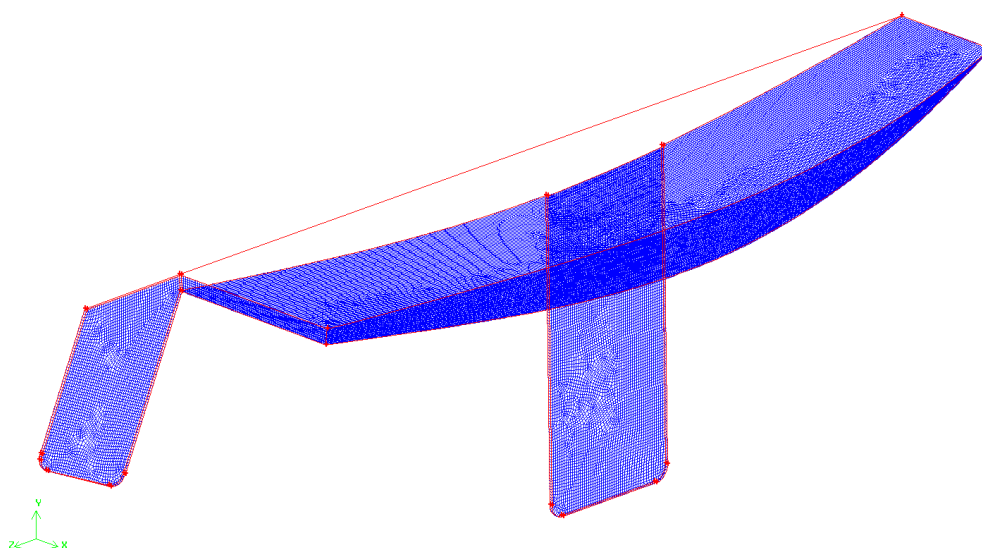
Slika 20. Geometrijska mreža cijele domene proračuna

Za svaki od slučajeva potrebno je izraditi novu mrežu. Kako bi se izbjegla potreba da se svaki put izrađuje kompletna nova mreža, svi volumeni domene, osim volumena neposredno uz trup jedrilice [Slika 21], su imali istu diskretizaciju za svaki od slučajeva.



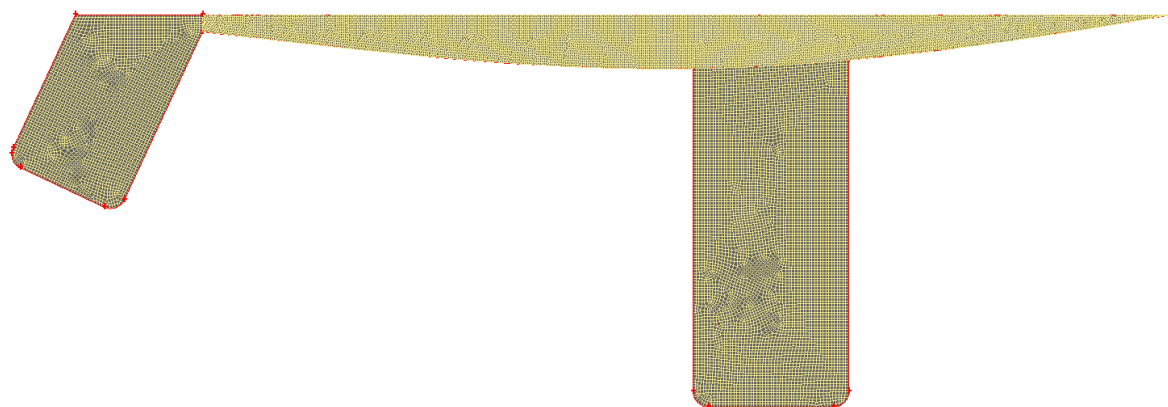
Slika 21. Geometrijska mreža za volumen neposredno uz trup jedrilice

Za različite slučajeve se mijenjala diskretizacija trupa [Slika 22] te se kao posljedica toga mijenjala i diskretizacija volumena neposredno uz trup jedrilice, što je prikazano na slici [Slika 21].

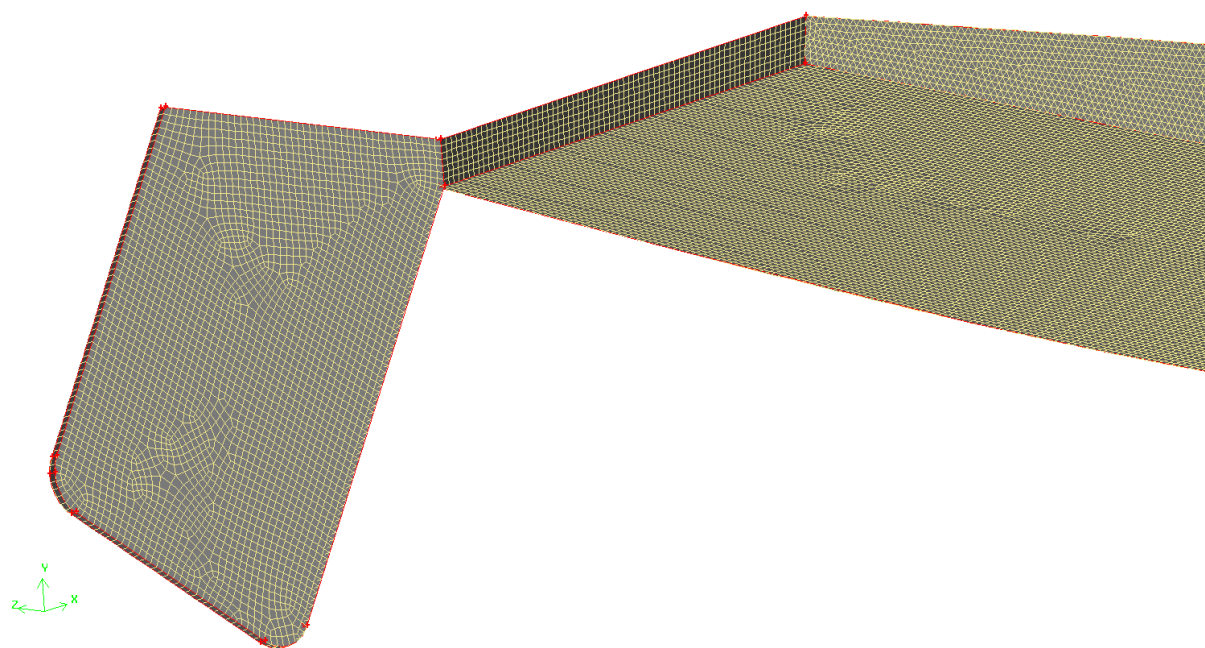


Slika 22. Mreža trupa jedrilice

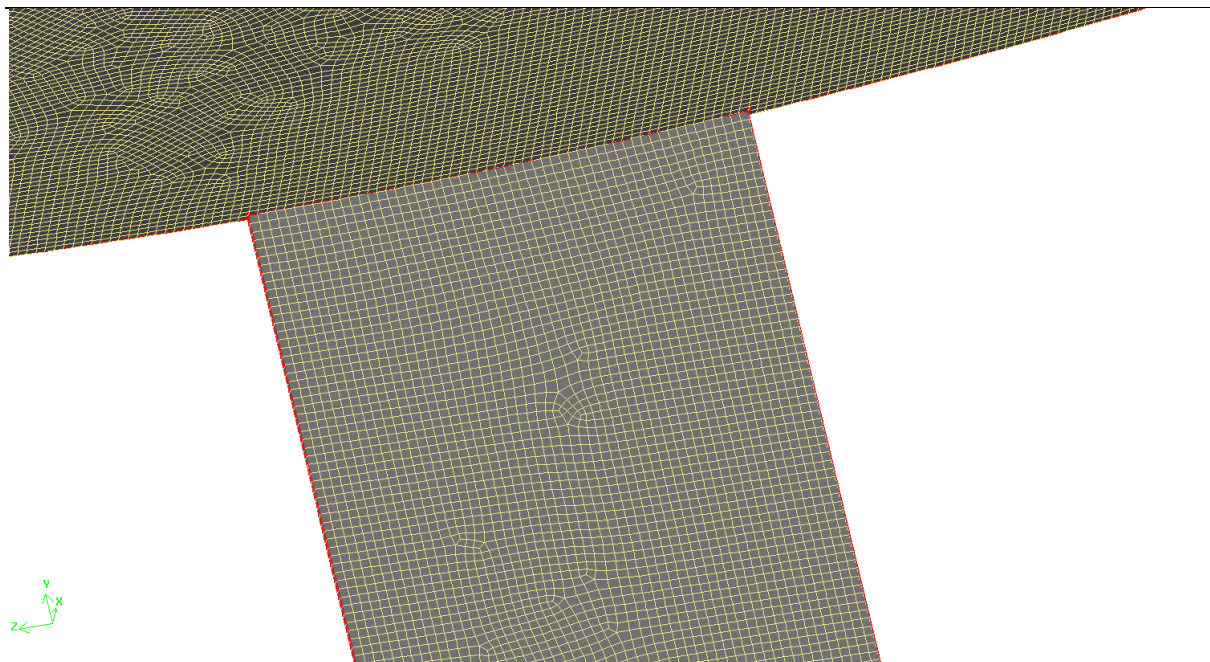
Detalji diskretizacije površine uronjenog djela jedrilice prikazani su na slikama dolje [Slika 23 - Slika 25].



Slika 23. Mreža uronjenog dijela jedrilice - bokocrt



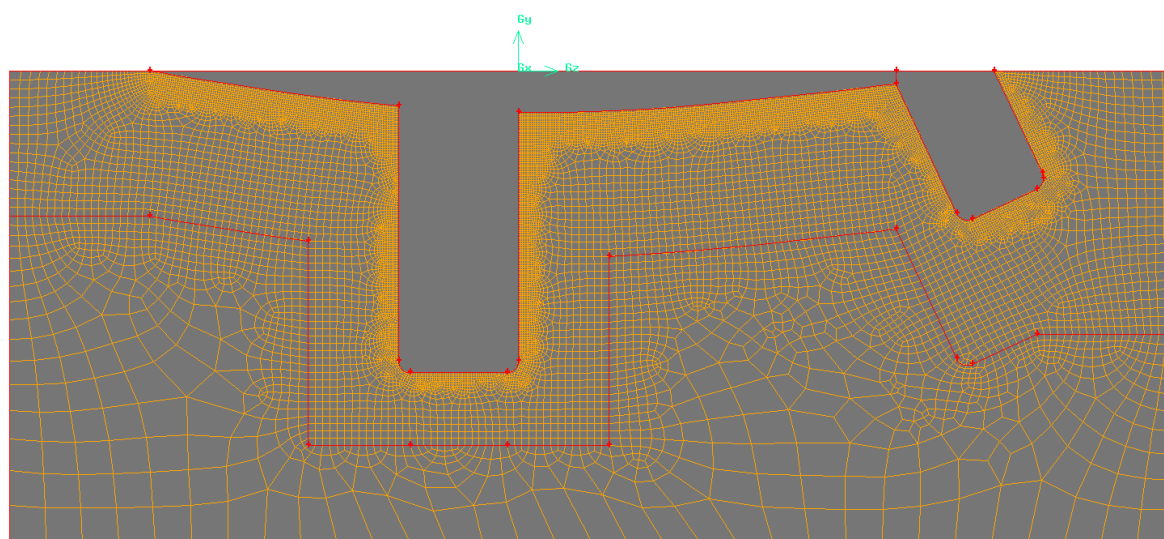
Slika 24. Detaljni prikaz mreže kormila i krme jedrilice



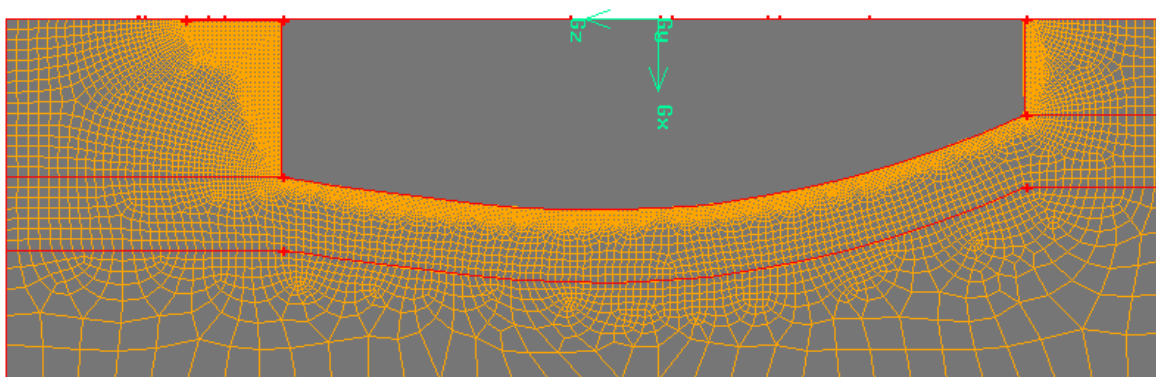
Slika 25. Detaljni prikaz mreže kobilice i dijela dna jedrilice

Nakon dovršene diskretizacije trupa jedrilice i 3D mreže volumena neposredno uz trup jedrilice, taj bi se volumen umetnuo i povezao s nepromjenjivim dijelom geometrijske mreže, te bi se na taj način dobila kompletna mreža za svaki slučaj.

Na slici [Slika 21] je također vidljivo da je volumen neposredno uz trup jedrilice podijeljen na dijelove. Funkcija tih dijelova je potpunije upravljanje strukturom i finoćom mreže na dijelu neposredno uz trup kako bi se što bolje opisale/prikazale promjene u sloju uz površinu jedrilice. Diskretizacije tih područja prikazane su na slikama [Slika 26 i Slika 27].



Slika 26. Diskretizacija sloja uz površinu jedrilice na vertikalnoj ravnini simetrije



Slika 27. Diskretizacija sloja uz površinu jedrilice na horizontalnoj ravnini simetrije

Nakon izvršene diskretizacije područja proračuna, potrebno je provjeriti kvalitetu mreža, koja se očituje u distordiranosti volumena. Velik broj distordiranih volumena može uzrokovati sporiju konvergenciju iterativnog postupka. Kod naglih prijelaza i oštih bridova, primjerice prijelazi s trupa jedrilice na kobilicu ili kormilo, potrebna je finija diskretizacija, da bi se izbjegla pretjerana distordiranost volumena u tom dijelu. Broj konačnih volumena mreža razlikuje se za svaki od slučajeva što je vidljivo u tablici [Tablica 4.].

Tablica 4. Broj konačnih volumena

Naziv slučaja	Broj konačnih volumena
30 kg ravno uronjeno	888 167
40 kg ravno uronjeno	1 087 454
45 kg ravno uronjeno	958 380
50 kg ravno uronjeno	924 074
60 kg ravno uronjeno	949 825
40 kg s nagibom 2 stupnja prema nazad	937 333
40 kg s nagibom 4 stupnja prema nazad	922 990
40 kg s nagibom 1 stupanj prema naprijed	2 010 774

4.4. Postavke numeričkih simulacija

Numerički proračun (procesorski dio) započinje učitavanjem mreže u računalni program 'Fluent', te provjerom i skaliranjem mreže. Korišten je model trodimenzijskog nestlačivog turbulentnog strujanja, koji obuhvaća sljedeće jednačbe: jednačba kontinuiteta, jednačba količine gibanja, a za opis turbulentnih veličina koristi se standardni $k-\varepsilon$ model turbulencije upotpunjen standardnim zidnim funkcijama.

Proračuni na svim navedenim mrežama, provedeni su s jednako definiranim rubnim uvjetima, kako prikazuje tablica [Tablica 5.]. Jedina iznimka je slučaj uronjen za 45 kg s nagibom 1 stupanj prema naprijed jer je jedini koji ima uronjen dio prove u promatranu domenu.

Tablica 5. Naziv (kratki opis) tablice

Naziv rubnog uvjeta	Fizikalno svojstvo rubnog uvjeta
Ulaz	Ulazna granica (Velocity inlet)
Izlaz	Izlazna granica (Outflow)
Simetrija	Ravnina simetrije (Symmetry)
Dno_V	Ravnina simetrije (Symmetry)
Bok_V	Ravnina simetrije (Symmetry)
Povrsina_V	Ravnina simetrije (Symmetry)
Kormilo	Nepropusna stijenka (Wall)
Krma	Nepropusna stijenka (Wall)
Bok	Nepropusna stijenka (Wall)
Dno	Nepropusna stijenka (Wall)
Kobilica	Nepropusna stijenka (Wall)
Prova (samo kod 45 kg + 1 st.)	Nepropusna stijenka (Wall)

Kada je površina definirana s rubnim uvjetom nepropusne stijenke (Wall) kao što su trup, kobilica i kormilo, pri strujanju fluida se formira granični sloj tj. fluid se zbog trenja lijepi za stijenku. Nasuprot tome rubni uvjet ravnine simetrije (Symmetry) se može tumačiti kao nepropusna stijenka na kojoj nema trenja, te na tako definiranoj stijenci nema stvaranja graničnog sloja.

Brzina strujanja vode zadana je na ulaznoj granici (Velocity inlet) iznosom od 1,5 m/s. Odabirom ove vrijednosti brzine osigurano je da se proračun odvija pri visokim Reynoldsovim brojevima što odgovara turbulentnoj naravi prolaska trupa jedrilice kroz vodu, odnosno uvjetima plovidbe stvarnog jedrilice.

Na ulazu su zadane vrijednosti intenziteta turbulencije (engl. Turbulent intensity, TI) i karakteristične duljine vrtloga (engl. Turbulent length scale, TLS):

$$\begin{aligned} TI &= 1\% \\ TLS &= 0,01 \text{ m} \end{aligned} \quad (51)$$

Zadane vrijednosti opisuju slučaj srednje mirne struje fluida, a odgovaraju vrijednostima veličina k i ε :

$$\begin{aligned} k &= 0.0003375 \text{ m}^2/\text{s}^2, \\ \varepsilon &= 0.0001018808 \text{ m}^2/\text{s}^3 \end{aligned} \quad (52)$$

S obzirom da su rubni uvjeti računalne simulacije stacionarni očekuje se stacionarno rješenje, te je prvi odabir bio stacionarni rješavač. Pri takvoj simulaciji, jednadžbe $k-\varepsilon$ modela turbulencije presporo i ne-monotono konvergiraju što zbog spregnutosti modela utječe na konvergenciju jednadžbe kontinuiteta, odnosno rezultira pojavom divergencije tlaka. Zbog toga je problem rješavan pomoću nestacionarnog rješavača u kojem se lakše kontrolira konvergencija proračunskog postupka odabirom povoljnog vremenskog koraka (tj. smanjivanjem vremenskog koraka). Uz navedeno, ovakvim postupkom rješavanja je utvrđeno da je ovako modeliran problem stacionaran, jer sve fizikalne veličine teže ka konstantnom iznosu. Broj iteracija unutar jednog vremenskog koraka je ograničen na maksimalno 200 iteracija.

Za približno određivanje vremena do kojeg je potrebno vršiti proračun korišten je deseterostruki omjer duljine jedrilice i brzine strujanja:

$$t_{\text{uk}} = 10 \frac{L}{v} = 10 \frac{2,3 \text{ m}}{1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 15,3 \approx 16 \text{ s}. \quad (53)$$

Početni uvjeti o poljima fizikalnih veličina preuzete su s ulazne granice. Dakle, na početku proračuna vrijednosti polja fizikalnih veličina su konstantne u cijeloj domeni strujanja, i jednake onima na ulaznoj granici (Velocity Inlet).

Prvih 5 dužina jedrilice, do približno osme sekunde, rješavač je koristio numeričku shemu prvog reda točnosti (First order upwind). Nakon toga je proračun nastavljen numeričkom shemom drugog reda točnosti (Second order upwind). Takav način proračuna je korišten jer je metoda drugog reda točnosti, koja općenito daje točnije rezultate u usporedbi s metodom

prvog reda točnosti, često nestabilna i ne konvergira kada se koristi od prvog vremenskog trenutka. U prvom dijelu proračuna uporabom sheme prvog reda točnosti dolazi se do približnog rješenja, a zatim se približno rješenje poboljšava upotrebom numeričke sheme drugog reda točnosti, te se na taj način dolazi do konačnog rješenja. Iznosi i broj vremenskih koraka po shemama točnosti prikazani su u tablicama ispod [Tablica 6. i Tablica 7.].

Tablica 6. Veličina i broj vremenskih koraka za shemu prvog reda točnosti

Veličina vremenskog koraka [s]	Broj vremenskih koraka	Vrijeme simulacije [s]
10^{-3}	50	0,05
$5 \cdot 10^{-3}$	20	0,1
0,01	800	8,00
Ukupno vrijeme simulacije sa shemom 1. reda točnosti [s]		8,15

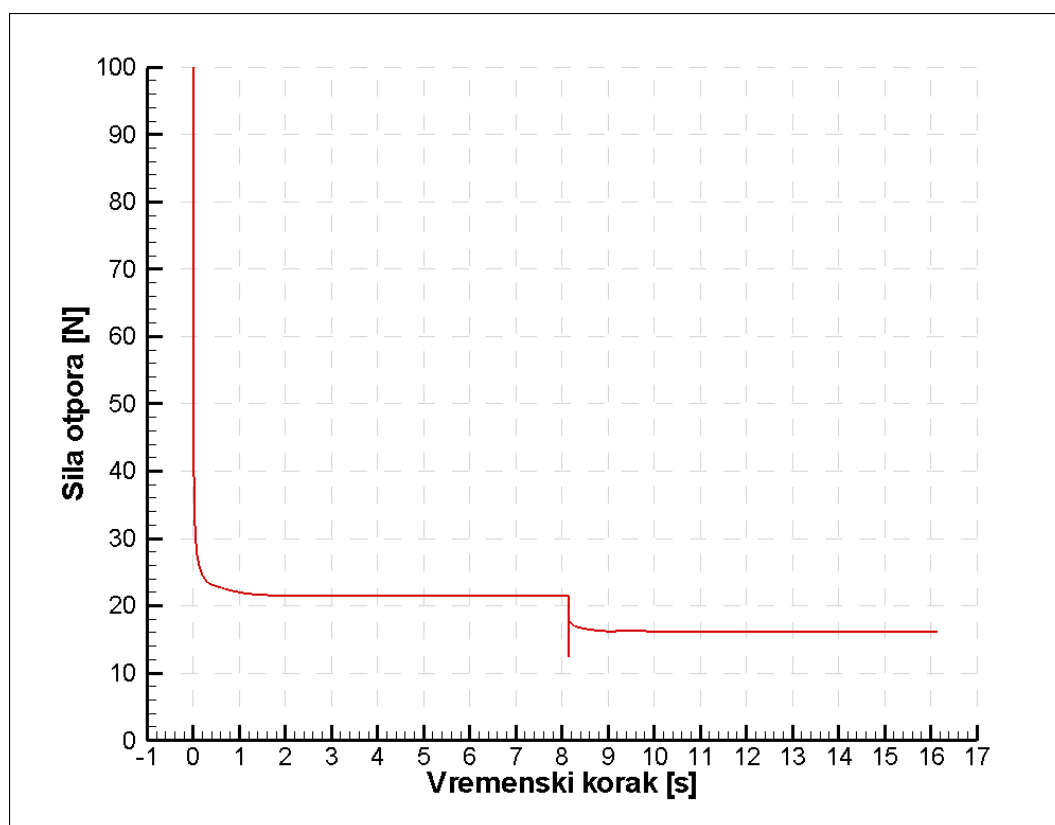
Tablica 7. Veličina i broj vremenskih koraka za shemu drugog reda točnosti

Veličina vremenskog koraka [s]	Broj vremenskih koraka	Vrijeme simulacije [s]
0,001	400	0,4
0,002	3800	7,6
Ukupno vrijeme simulacije sa shemom 2. reda točnosti [s]		8,00

Iako je postavljeno ograničenje broja iteracija po vremenskom koraku na 200 iteracija, broj izvršenih iteracija je u prosjeku bio oko 60 iteracija po vremenskom koraku. Ukupan broj vremenskih koraka i prvog i drugog dijela proračuna iznosi 5 070. Iz čega proizlazi da je po proračunu, za jedan od slučajeva, ukupan broj iteracija iznosio oko 300 000. Takav jedan proračun izvodio se oko 40 sati na stolnom računalu (četverojezgreni procesor 2,4 GHz, 8 GB radne memorije).

5. PRIKAZ I ANALIZA REZULTATA

Proračuni su dovršeni kada reziduali svih jednažbi postanu manji od 10^{-4} i kada se sila hidrodinamičkog otpora jedrilice ustali u četvrtoj značajnoj znamenici, što je u svakom od proračuna postignuto prije 16,15 sekunde simulacije. Konvergencija sile otpora prikazana je na slici [Slika 28], gdje su vidljive skokovite promjene oko 8,15 sekunde koje nastaju pri zamjeni sheme prvog reda shemom drugog reda točnosti. Za slučaj prikazan na slici proračun je proveden do 16,15 sekundi kako bi se pokazalo da nema promjene sile otpora nakon što se njena vrijednost ustali poslije promjene sheme diferencije.

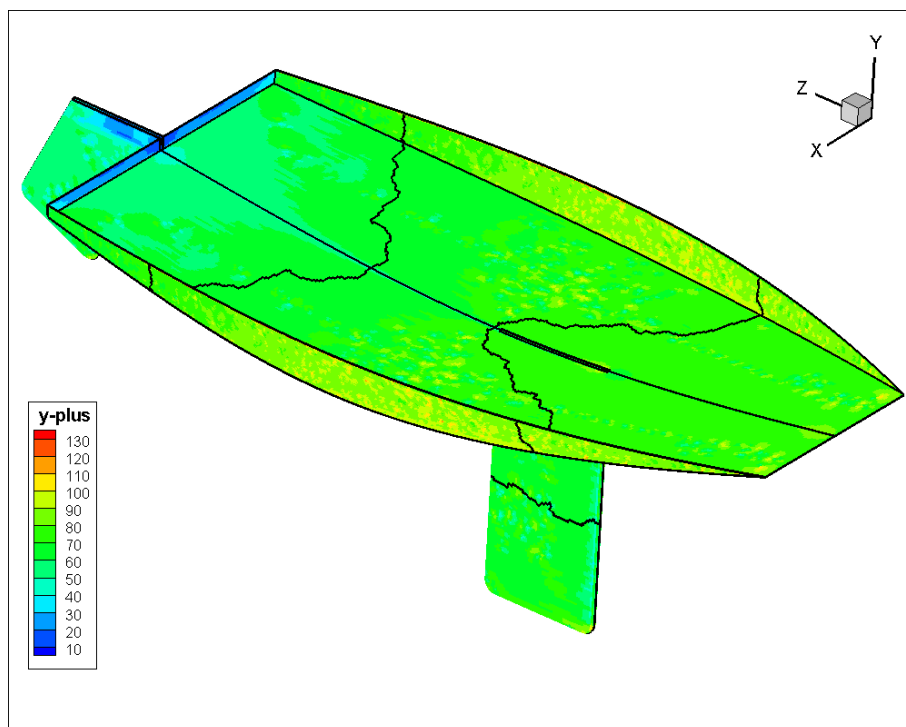


Slika 28. Prikaz konvergencija sile otpora, slučaj 40kg ravno uronjeno

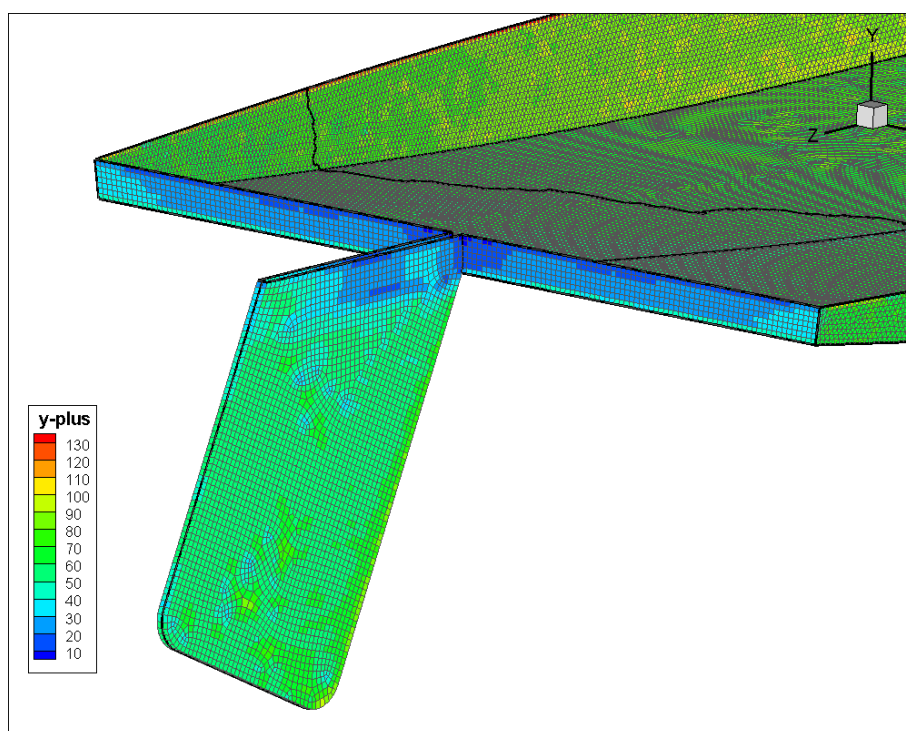
U proračunima je bitno kontrolirati iznose y^+ jer se na taj način dobiva informacija o tome opisuje li mreža dobro promatrano strujanje, iz čega se indirektno može zaključivati i o valjanosti samih rezultata proračuna.

Raspodjela bezdimenzijske udaljenosti težišta prvih volumena uz stijenke y^+ za slučaj 45 kg ravno uronjeno prikazana je na slici [Slika 29], dok je detalj krme i kormila prikazan na slici [Slika 30]. Slične raspodjele y^+ se pojavljuju i u ostalim slučajevima.

Napomena: Nepravilne linije koje se mogu primijetiti na pojedinim slikama nemaju nikakvo značenje a prikazuju procesorsku granicu.



Slika 29. Raspodjela y^+ za uronjeni dio jedrilice, pogled od naprijed za slučaj 45 kg ravno uronjen



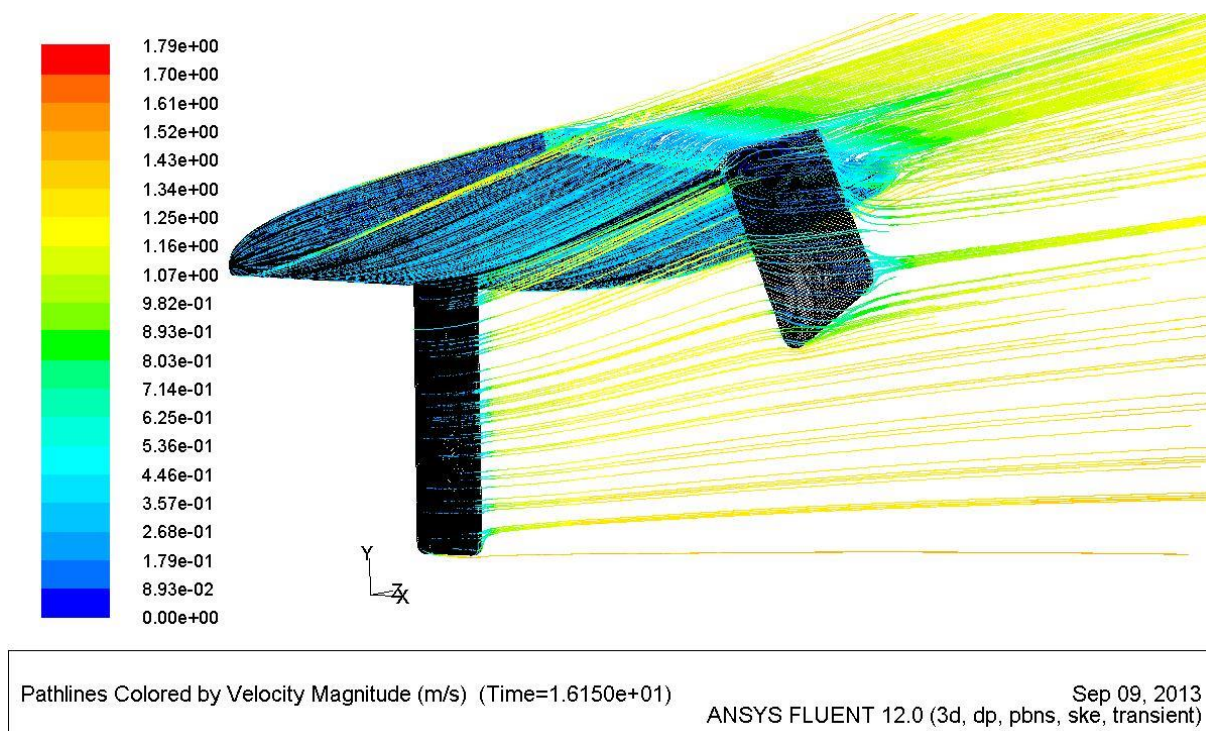
Slika 30. Raspodjela y^+ za uronjeni dio jedrilice, detalj kormila i krme, sa prikazanom mrežom za slučaj 45 kg ravno uronjen

Na slici [Slika 29] se vidi da se vrijednosti y^+ uglavnom kreću u rasponu od 50 do 130, što je u području valjane primjene standardnih zidnih funkcija:

$$30 < y^+ < 600 \text{ do } 1000. \quad (54)$$

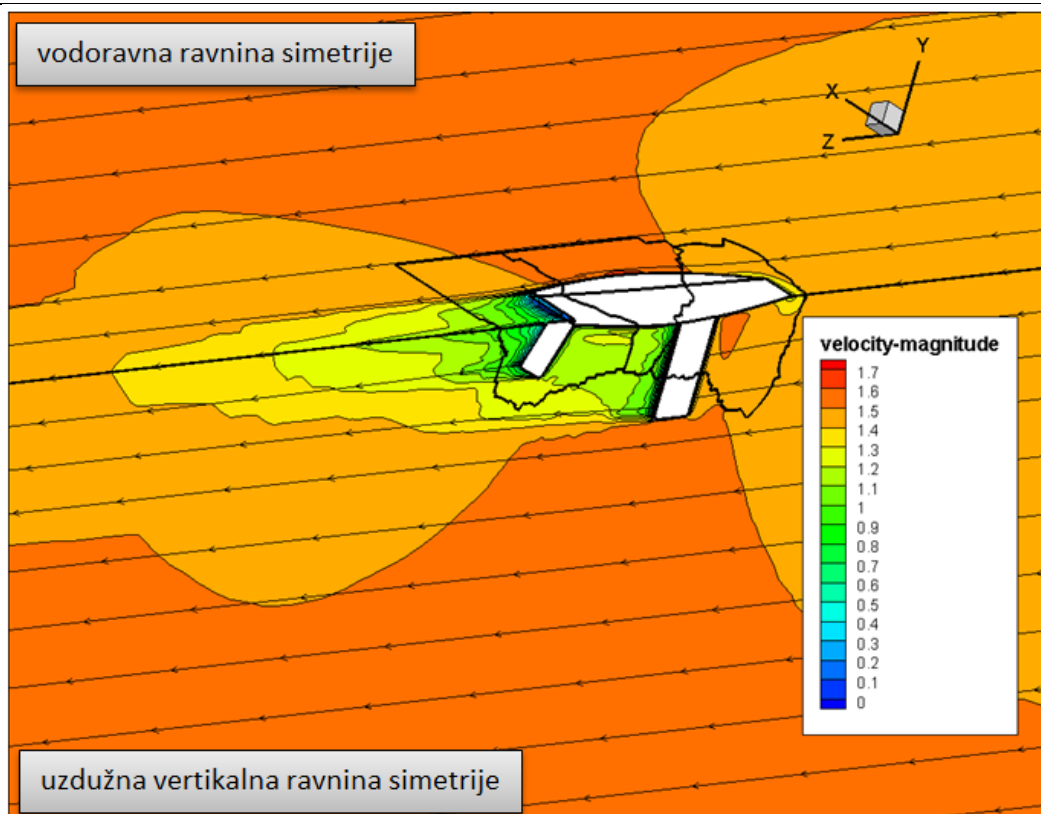
Na slici [Slika 30] je vidljivo da se manje vrijednosti y^+ pojavljuju na krmi i kobilici, što su mjesta odvajanja strujanja. Na područjima gdje je vrijednost y^+ manja od 30 narušena je točnost primjene zidnih funkcija. No, kako je u tim područjima iznos tangencijalnih naprezanja mali, neće se pojaviti značajnija pogreška pri izračunu otpora.

Na slici [Slika 31] su prikazane strujnice koje opisuju način opstrujavanja uronjenog dijela jedrilice. Prikazano je strujanje oko kobilice i kormila te trag koji nastaje nakon krme a posljedica je prolaska trupa kroz vodu.



Slika 31. 3D prikaz opstrujavanja uronjenog dijela jedrilice, gdje su strujnice u bojama vrijednosti apsolutne brzine za slučaj 45 kg ravno uronjen

Slika [Slika 32] prikazuju polje apsolutne brzine i strujnice na ravninama simetrije: uzdužna vertikalna ravnina simetrije i horizontalna ravnina simetrije na površini vode. Vidljivi su poremećaji brzine koji nastaju iza kobilice i kormila.



Slika 32. Prikaz polja apsolutne brzine i strujnica na ravninama simetrije, za slučaj 45 kg ravno uronjen

Na slikama [Slika 33 i Slika 34] je prikazana raspodjela bezdimenzijskog koeficijenta tlaka na uronjenom dijelu jedrilice za slučaj 45 kg ravno uronjen. Bezdimenzijski koeficijent tlaka koji se definira kao:

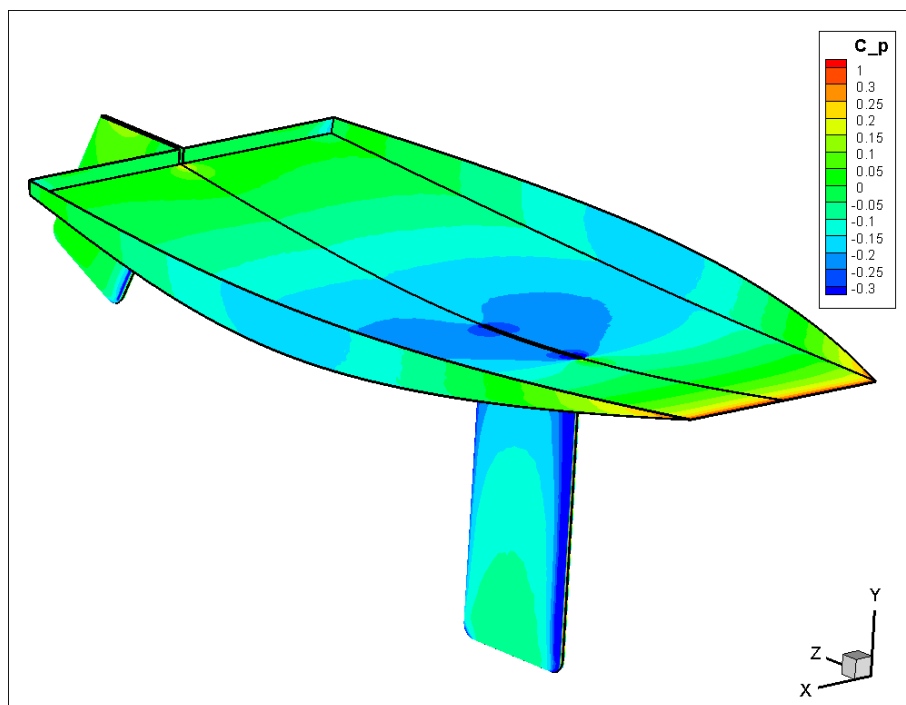
$$C_p = \frac{p - p_u}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2}, \quad (55)$$

gdje p_u označava tlak na ulaznoj granici, p polje tlaka, a nazivnik jednadžbe (55) je dinamički tlak u kojem veličina v_∞ označava brzinu neporemećenog strujanja.

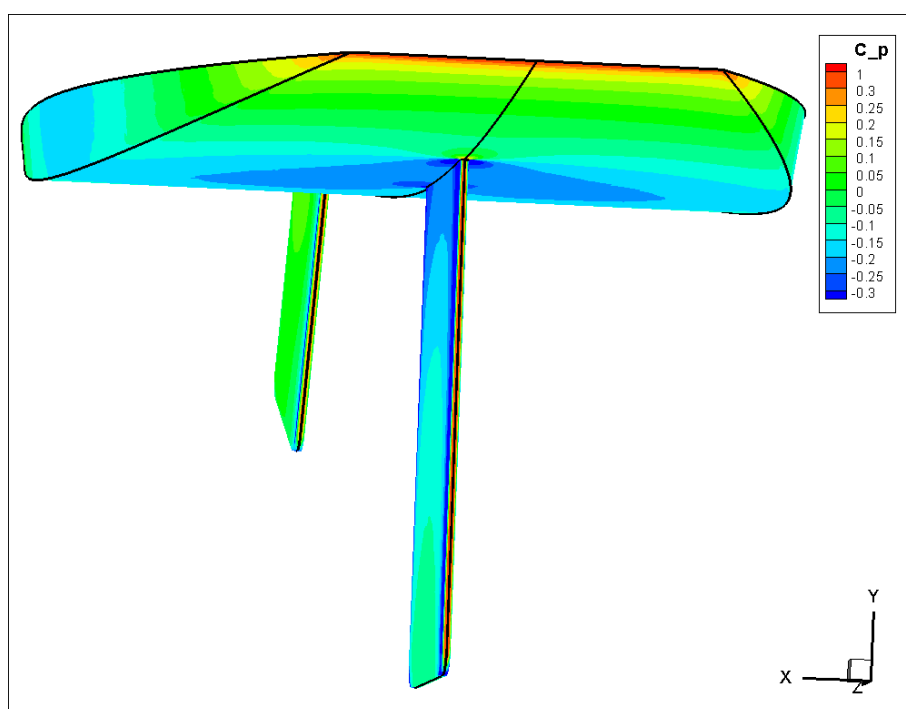
U zaustavnoj točki brzina je jednaka nuli, a vrijednost tlaka je najveća. Tlak u zaustavnoj točki se zove zaustavni tlak (engl. stagnation pressure) jednak je zbroju dinamičkog tlaka neporemećenog strujanja i statičkog tlaka. Slijedi da je vrijednost koeficijenta tlaka u zaustavnoj točki jednaka jedinici. Zaustavne točke su vidljive na uvećanim prikazima na slikama [Slika 35 i Slika 36].

Vidljivo je da na stražnjim stranama uronjenog dijela jedrilice, za razliku od prednjih strana, izostaje raspodjela tlaka tipična za okoliš zaustavne točke. To je uzrokovano

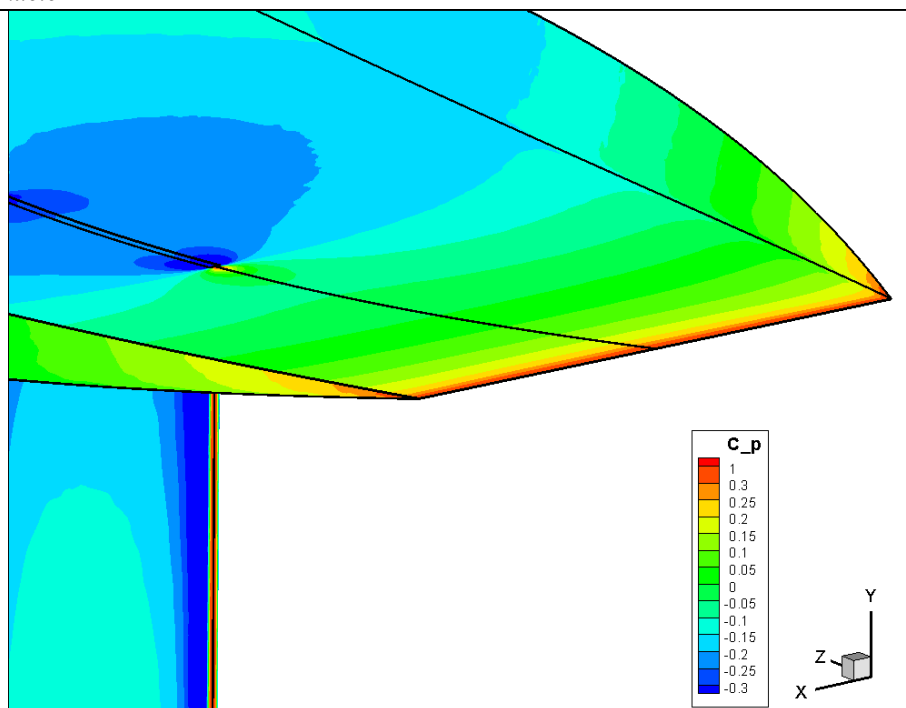
odvajanjem strujanja na kobilici i kormilu, što predstavlja glavni doprinos ukupnom otporu trupa jedrilice – otporu oblika.



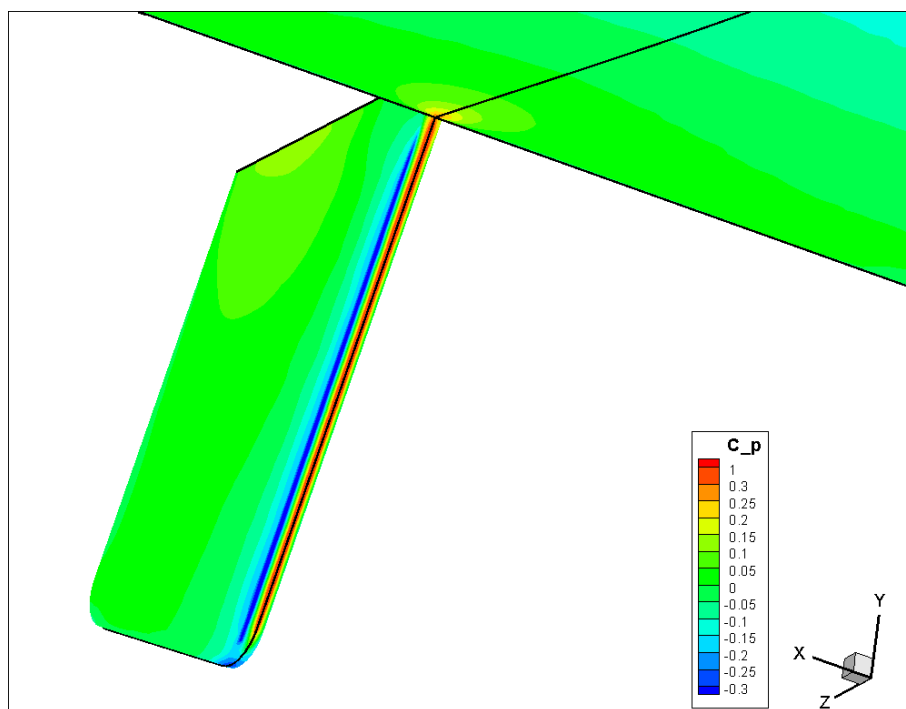
Slika 33. Raspodjela koeficijenta tlaka C_p



Slika 34. Raspodjela koeficijenta tlaka C_p , pogled s prednje strane



Slika 35. Uvećani prikaz raspodjele koeficijenta tlaka C_p na prednjem dijelu kobilice i trupa



Slika 36. Uvećani prikaz raspodjele koeficijenta tlaka C_p na prednjem dijelu kormila

Rezultati proračuna koeficijenta otpora i hidrodinamičke sile otpora uronjenog dijela jedrilice za različite slučajeve mase jedriličara i nagiba jedrilice sažeti su u tablici [Tablica 8.].

Pri tome su korištene oznake:

- $C_D [-]$ - bezdimenzijski koeficijent otpora, definiran u pozitivnom smjeru osi z
- $F_D [N]$ - hidrodinamička sila otpora, definirana u pozitivnom smjeru osi z

Bezdimenzijski koeficijent otpora je izračunat prema izrazu:

$$C_D = \frac{F_D}{A_{ref} \rho \frac{v_\infty^2}{2}}, \quad (56)$$

gdje A_{ref} označava referentnu površinu uronjenog dijela jedrilice, ρ gustoću fluida, a veličina v_∞ označava brzinu neporemećenog strujanja, te iznose:

$$A_{ref} = 0,25 \text{ m}^2; \quad \rho = 1000 \text{ kg/m}^3; \quad v_\infty = 1,5 \text{ m/s}, \quad (57)$$

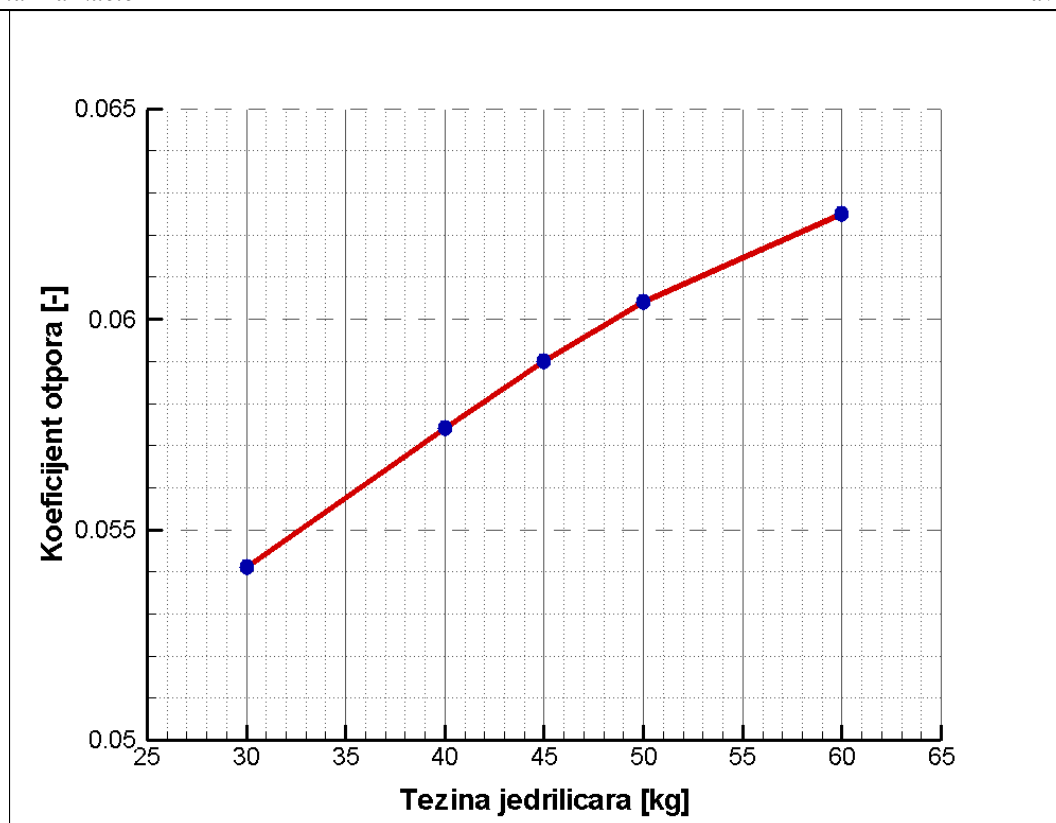
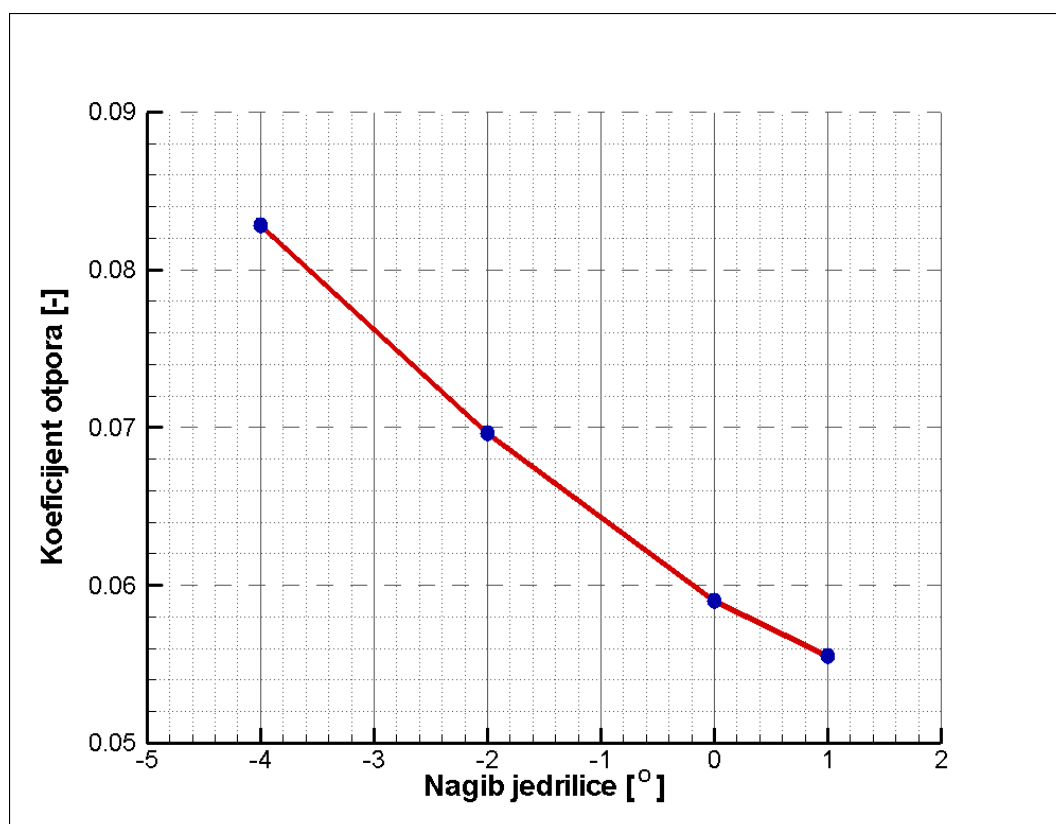
Tablica 8. Usporedba koeficijenata otpora i hidrodinamičke sile otpora za ravno uronjene slučajeve

Naziv slučaja	Masa jedriličara [kg]	$F_D [N]$	C_D
30 kg ravno uronjeno	30	15,22	0,05412
40 kg ravno uronjeno	40	16,14	0,05739
45 kg ravno uronjeno	45	16,60	0,05902
50 kg ravno uronjeno	50	16,98	0,06037
60 kg ravno uronjeno	60	17,68	0,06286

Tablica 9. Usporedba koeficijenata otpora i hidrodinamičke sile otpora za slučajeve s nagibom jedrilice

Naziv slučaja	Nagib [$^\circ$]	$F_D [N]$	C_D
45 kg s nagibom 4 stupnja nazad	-4	23,30	0,08284
45 kg s nagibom 2 stupnja nazad	-2	19,85	0,07058
45 kg ravno uronjeno	0	16,60	0,05902
45 kg s nagibom 1 stupanj naprijed	+1	15,62	0,05554

Ovisnost bezdimenzijskog koeficijenta otpora uronjenog dijela jedrilice za različite slučajeve istisnina i nagiba prikazani su na slikama [Slika 37 i Slika 38].

Slika 37. Ovisnost koeficijenta otpora C_D o masi jedrilicaraSlika 38. Ovisnost koeficijenta otpora C_D o nagibu jedrilice

Kao što je i očekivano, s porastom mase jedriličara, tj. s povećanjem istisnine raste i koeficijent hidrodinamičkog otpora, što se vidi na slici [Slika 38]. Iz rezultata i grafičkih prikaza također proizlazi da će se koeficijent otpora mijenjati i s promjenom nagiba. S povećanjem nagiba prema nazad kada je krma uronjenija rast će i koeficijent otpora, dok će s nagibima prema naprijed kada je prova uronjenija doći do pada koeficijenta otpora.

Hidrodinamička sila otpora je ukupna sila otpora nastala zbrojem sile otpora oblika koja nastaje zbog razlike tlakova i sile otpora trenja koja je posljedica tangencijalnih naprezanja po površini jedrilice. Bezdimenzijski koeficijenti otpora oblika i trenja, definirani na isti način kao i ukupni koeficijent otpora, prikazani su u tablici [Tablica 10. i Tablica 11.] gdje je:

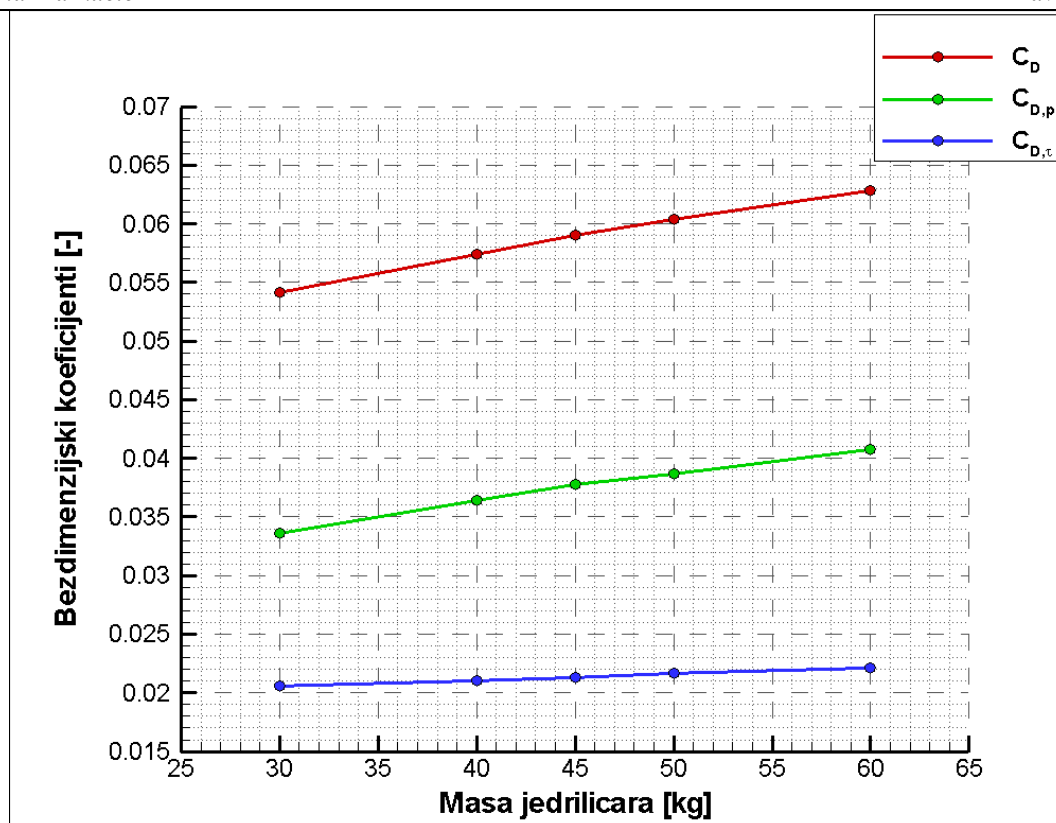
- $C_{D,p}$ [–] - koeficijent otpora oblika,
- $C_{D,\tau}$ [–] - koeficijent otpora trenja.

Tablica 10. Usporedba koeficijenata otpora za slučajeve s ravnim uronom

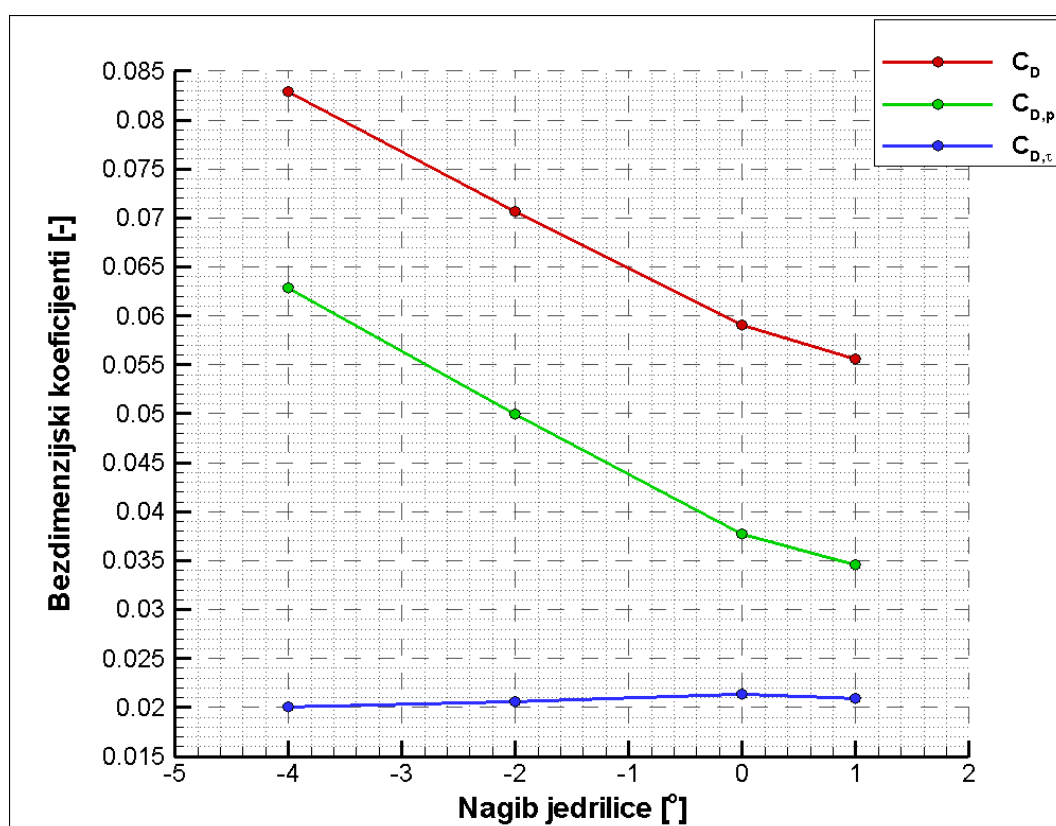
Naziv slučaja	$C_{D,p}$	$C_{D,\tau}$	C_D
30 kg ravno uronjeno	0,03358	0,02053	0,05412
40 kg ravno uronjeno	0,03637	0,02102	0,05739
45 kg ravno uronjeno	0,03772	0,02130	0,05902
50 kg ravno uronjeno	0,03868	0,02167	0,06037
60 kg ravno uronjeno	0,04075	0,02212	0,06286

Tablica 11. Usporedba koeficijenata otpora za slučajeve s nagibom jedrilice

Naziv slučaja	$C_{D,p}$	$C_{D,\tau}$	C_D
45 kg s nagibom 4 stupnja nazad	0,06283	0,02001	0,08284
45 kg s nagibom 2 stupnja nazad	0,04996	0,02063	0,07058
45 kg ravno uronjeno	0,03772	0,02130	0,05902
45 kg s nagibom 1 stupanj naprijed	0,03460	0,02092	0,05554



Slika 39. Ovisnost koeficijenta otpora o masi jedrilicara



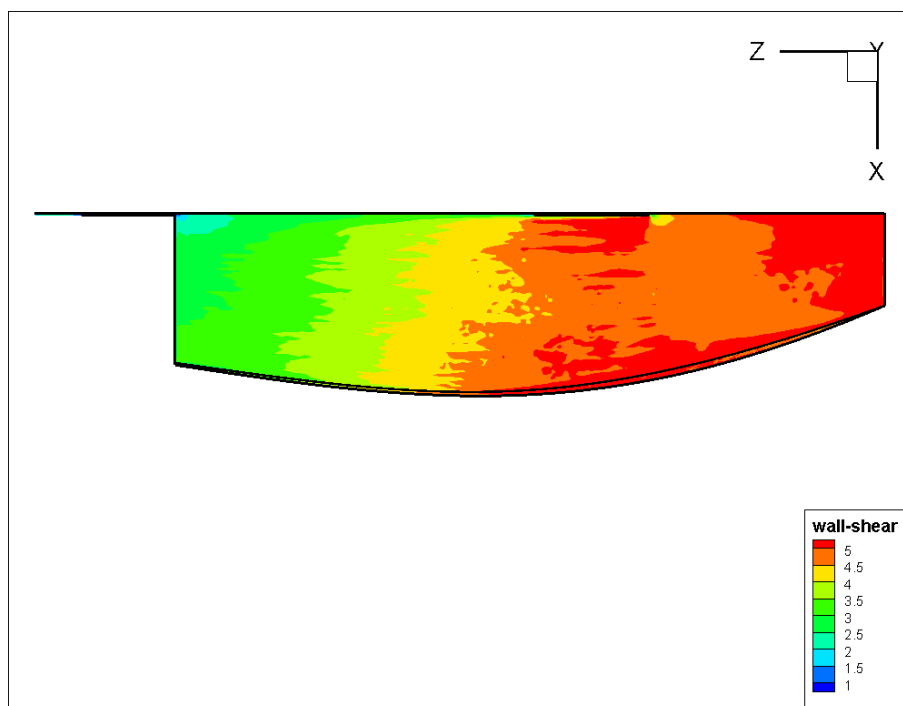
Slika 40. Ovisnost koeficijenta otpora o nagibu jedrilice

Na slikama [Slika 39 i Slika 40] su grafički prikazane promjene koeficijenta otpora, pri čemu se vide utjecaji otpora trenja i otpora oblika na ukupni iznos otpora.

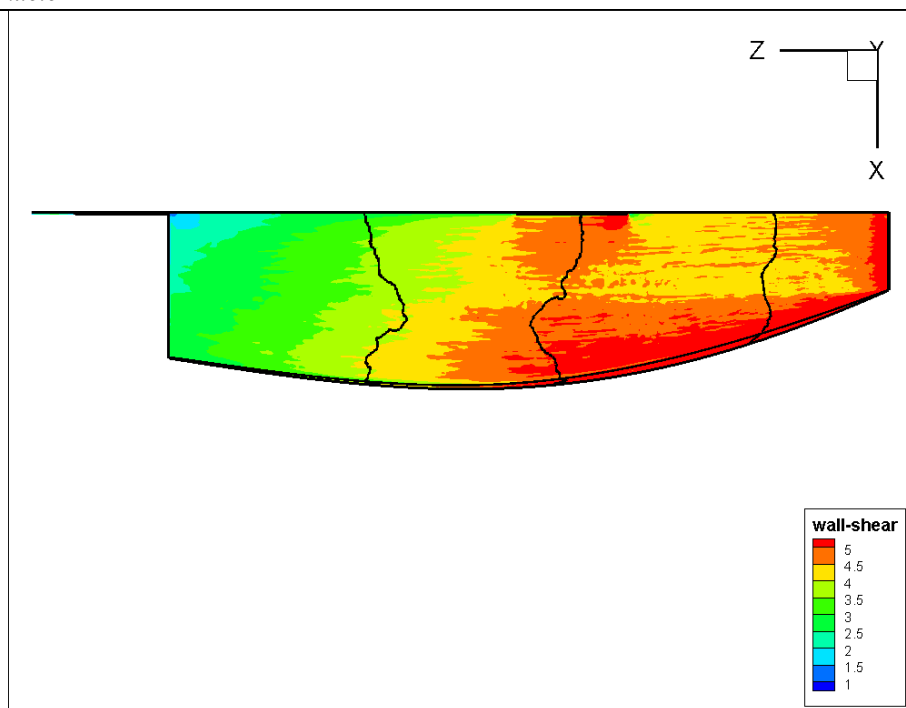
Koeficijent otpora oblika $C_{D,p}$ se smanjuje pri promjeni nagiba od 0 do 1 stupanj prema naprijed, a raste pri promjeni nagiba od 0 do 4 stupnja prema nazad. S porastom mase raste i koeficijent otpora oblika $C_{D,p}$. Također je uočljivo da koeficijent otpora trenja $C_{D,r}$ nema znatnog porasta ili smanjenja bez obzira varira li se nagib ili masa jedriličara. Za razliku od koeficijenta otpora trenja, koeficijent otpora oblika u većoj mjeri doprinosi ukupnom hidrodinamičkom koeficijentu otpora.

U slučaju 45 kg s nagibom 1 stupanj prema naprijed javlja se manji otpor nego za slučaj 45 kg ravno uronjeno, što je vidljivo iz tablica [Tablica 8.] i grafičkih prikaza [Slika 37 - Slika 38]. Navedeno je rezultat toga što je kod slučaja 45 kg s nagibom 1 stupanj prema naprijed u promatranu domenu uronjen dio prove koji uzrokuje slabije naližeganje strujanja na prvom dijelu dna do kobilice. Posljedica toga je manji otpor trenja na tom dijelu jedrilice, što u konačnici rezultira manjim ukupnim otporom jedrilice. Ako bi došlo do pojave odvajanja strujanja otpor bi značajno porastao, zbog pojave otpora vrtloženja.

Manji otpor trenja prednjeg dijela dna trupa jedrilice (područje do kobilice) je vidljiv na prikazu tangencijalnog naprezanja na stijenci potopljenog dijela jedrilice, što je prikazano slikama [Slika 41 i Slika 42].



Slika 41. Tangencijalno naprezanje za 45 kg ravno uronjeno



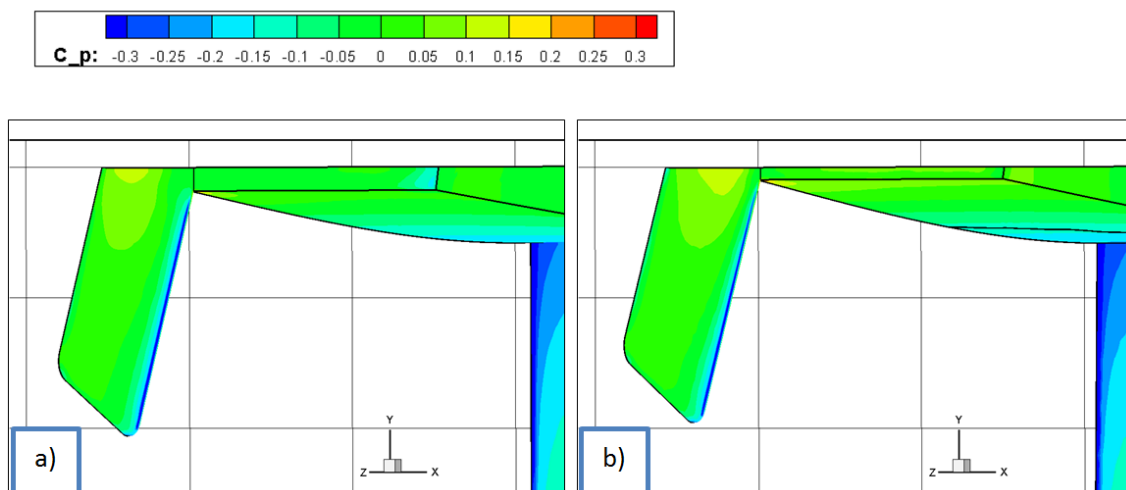
Slika 42. Tangencijalno naprezanje za 45 kg s nagibom 1 stupanj prema naprijed

Budući da ova simulacija ne obuhvaća valni otpor, gdje bi se inače na pramcu pojavio veći tlak (jer bi se tamo popeo val), već je zaustavni tlak u oba slučaja isti, povećani doprinos pramca na otpor se niti ne može vidjeti (opisati).

U oba slučaja je uronjena površina krme izložena približno istom tlaku koji nastaje u području odvajanja strujanja što je prikazano slikom [Slika 43]. Ali je uronjena površina krme za nagib 1 stupanj prema naprijed manja zbog čega je izloženost tlaku u vrtložnom tragu čamca manja. Može se konstatirati da slučaj s nagibom 1 stupanj prema naprijed ima bolje ("hidrodinamičnije") oblikovano opstujavano tijelo jer zadnji dio (krmeni dio) više sliči završetku kapljice nego što je to slučaj za 45 kg ravno uronjeno, što je vidljivo i iz smanjenja otpor oblika. Razlika u površinama je dana tablicom [Tablica 12.].

Tablica 12. Površina uronjenog dijela krme

Naziv slučaja	Površina uronjenog dijela krme [m ²]
45 kg ravno uronjeno	0,01550
45 kg s nagibom 1 stupanj prema naprijed	0,00806

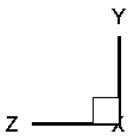
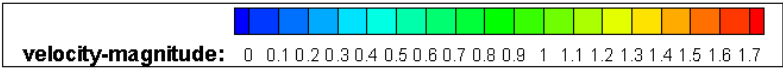
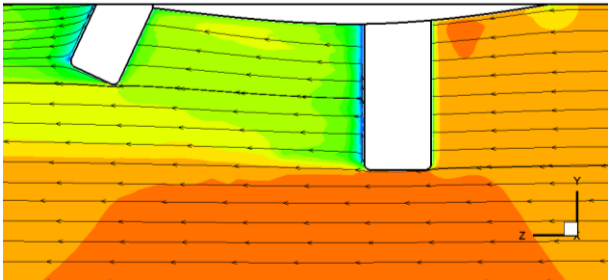
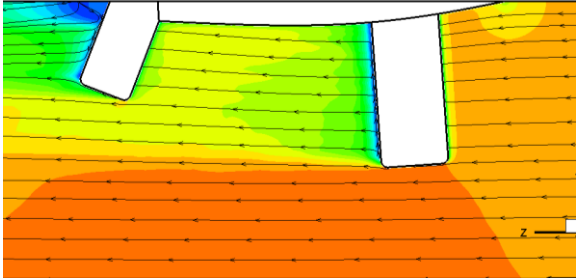
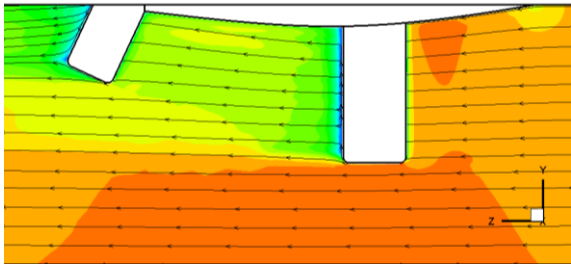
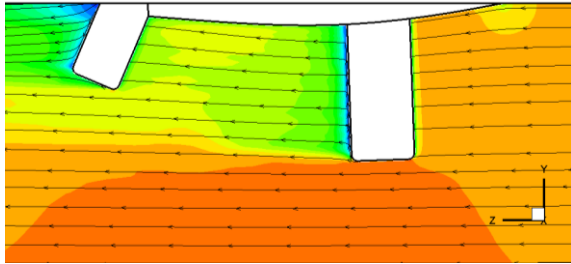
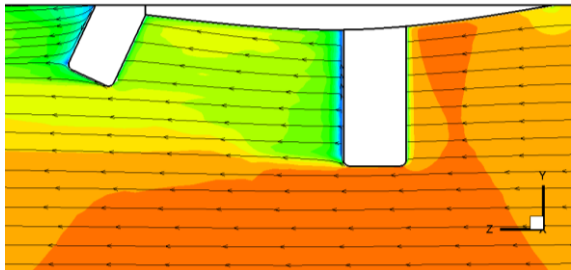
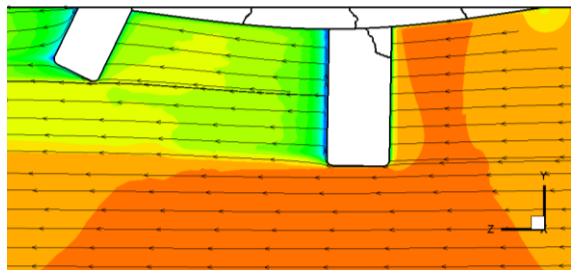


Slika 43. Usporedni prikaz koeficijenta tlaka za slučajeve: a) 45 kg ravno uronjeno; b) 45 kg s nagibom 1 stupanj prema naprijed

Kao posljedica izostavljanja valnog otpora u modelu, nepotpunog naližeganja strujanja na prednjem dijelu trupa i manje uronjenosti krme na promatranom slučaju dobiva se manji ukupni otpor za slučaj 45 kg s nagibom 1 stupanj prema naprijed nego za slučaj 45 kg ravno uronjeno.

U nastavku su dani prikazi polja apsolutne brzine na uzdužnoj vertikalnoj ravnini simetrije sa strujnicama [Slika 44 - Slika 49]. Prikazani su slučajevi najmanje (30 kg), najveće (60 kg) i srednje (45 kg) mase jedriličara te sva tri nagiba. Svi slučajevi na slikama [Slika 44 - Slika 49] imaju istu skalu te su svi prikazani u YZ ravnini tj. na uzdužnoj vertikalnoj ravnini simetrije.

Iz usporednog prikaza slika je vidljivo kako se utjecaj kobilice i kormila mijenja kroz različite slučajeve. Područja u kojima se promjena apsolutne vrijednosti brzine vide su ispred i iza kobilice te nakon kormila.

Promjena polja apsolutne brzine s uronom	Promjena polja apsolutne brzine s nagibom
 	
 <p>Slika 44. Polje apsolutne brzine za 30 kg ravno uronjeno</p>	 <p>Slika 45. Polje apsolutne brzine za 45 kg s nagibom 4 stupnja prema nazad</p>
 <p>Slika 46. Polje apsolutne brzine za 45 kg ravno uronjeno</p>	 <p>Slika 47. Polje apsolutne brzine za 45 kg s nagibom 2 stupnja prema nazad</p>
 <p>Slika 48. Polje apsolutne brzine za 60 kg ravno uronjeno</p>	 <p>Slika 49. Polje apsolutne brzine za 45 kg s nagibom 1 stupanj prema naprijed</p>

6. ZAKLJUČAK

Ispitan je utjecaj volumena istisnine i uzdužnog nagiba uronjenog dijela jedrilice (koji ovise o masi jedriličara i njegovoj poziciji na jedrilici) na hidrodinamičku silu otpora za osam različitih slučajeva. Od toga je analizirano pet slučajeva ravno uronjenog dijela jedrilice za različite mase jedriličara te tri slučaja za različite uzdužne nagibe pri konstantnoj masi jedriličara. Proračuni su izvedeni s pojednostavljenom geometrijom uronjenog dijela jedrilice i zadanim ravninama simetrije uz primjenu standardnog $k-\varepsilon$ modela turbulencije i standardnih zidnih funkcija. Usvojeni proračunski model rezultirao je stacionarnim rješenjima za svaki od slučajeva.

Rezultati se sastoje od polja fizikalnih veličina koje opisuju strujanje oko uronjenog dijela jedrilice za zadanu brzinu kretanja. Izračunati su iznosi hidrodinamičke sile i koeficijenti otpora, prema kojima je moguće pratiti trendove i međusobne odnose kroz promatrane slučajeve.

Hidrodinamička sila otpora raste s porastom volumena istisnine tj. s porastom mase jedriličara. Ovisno o promjenama nagiba uočen je porast hidrodinamičke sile otpora za nagibe prema nazad (-4 i -2 stupnja prema nazad), a za nagib prema naprijed (+1 stupanj) uočeno je smanjenje iznosa hidrodinamičke sile otpora. U svrhu analize promjene hidrodinamičke sile otpora praćene su promjene iznosa sila otpora trenja i sila otpora oblika. Promjena sile otpora trenja je neznatna i pri promjeni volumena istisnine i pri promjeni mase jedriličara. Iz navedenog se može zaključiti da na ukupnu silu hidrodinamičkog otpora jedrilice dominantno utječe sila otpora oblika.

Rezultati obuhvaćeni ovim radom pružaju uvid u trendove promjena hidrodinamičkih sila otpora pri konstantnoj brzini kretanja jedrilice te bez pojave valova na površini. Dodatnim proračunima i simulacijama mogu se ispitati daljnje promjene hidrodinamičke sile otpora za različite brzine jedrilice, s pojavom otpora valova te s bočnim nagibima jedrilice koji su karakteristični za jedrenje.

LITERATURA

- [1] Džijan, I.: Računalna dinamika fluida – podloge za predavanja, Zagreb, 2010.
- [2] Mehanika fluida II – što valja zapamtiti, Fakultet strojarstva i brodogranje, Zagreb
- [3] Sorić, J.: Uvod u numeričke metode u strojarstvu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2009.
- [4] Radan, D.: Uvod u hidrodinamiku broda, Sveučilište u Dubrovniku, Dubrovnik, Siječanj 2004.
- [5] Fluent 6.3 Tutorial Guide, Fluent Inc., Centerra Resouce Park, 2006.
- [6] Gambit modelling guide, Fluent Inc., Centerra Resouce Park, 2007.
- [7] Kraut, B.: Strojarski priručnik, Sajema d.o.o., Zagreb, 2009.
- [8] Brodogradnja, časopis brodogradnje i brodograđevne industrije, Zagreb, Srpanj 1973.
- [9] International Sailing Federation (ISAF), <http://www.sailing.org>
- [10] International Optimist Dinghy Association (IODA), <http://www.optiworld.org/>

PRILOZI

- I. CD-R disc
- II. The ideal size for the Optimist

The ideal size for the Optimist

“The ideal size for the Optimist is 1.60m and 46kg” NOT!!

The world of sailing is obsessed with the “right” size for each boat. This is scarcely surprising. The medallists at the last Olympics in the Laser Class weighed within 1kg. of each other, the 470 male and 49er teams within 2kg, the Stars within 5kg. OK, so the Finn medallists spanned a weight range of 8kg but at an average of 100kg that is only 8%!

By contrast the weights of the top 10 Optimists at the last Worlds spanned 14kg or 30%!



On the left is the team with the best results at the 2002 Worlds (the winners of the Miami Herald trophy for the best four sailors). They weighed from 38kg (12 year old Paolo Cattaneo who ranked 18th in the 208 boat fleet) to Fabio Zeni at 53kg in his final year who finished 8th.

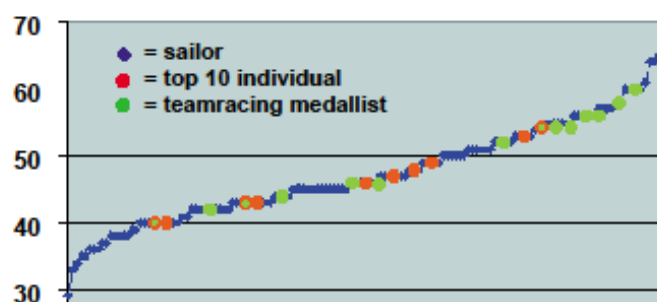
The *average* weight of the 208 participants was 46.3kg. Which is pretty close to the average of Paolo and Fabio. And doesn't prove a lot!

This was in wind speeds of up to 12 knots. In the windiest Worlds on record the winner was Peder Ronholt (right) at 59kg and 1m81. Both he and the “little” girl next to him (Suzanne Ward) went on to become Olympic sailors.



The Top 10

The weights of top ten sailors were typical of a large proportion of the fleet:



	Height	Weight
Matika	1.49	40
Cesic	1.63	43
Zalvide	1.60	47
Kirkland	1.53	46
Le Fevre	1.68	48
Xu	1.70	54
Dubbini	1.65	49
Zeni	1.60	53
Mills	1.53	40
Chew	1.57	43

Were some sailors too heavy?

Possibly. But Damian Saponara (60kg) and Kresimir Kunda (58kg) - pictured below - found their weight useful in the 20+ knots of the team-racing day when they both secured medals, as did Luciano Oggero (57kg).

And there is life after the Optimist. Steven Krol (NED) (64kg) went straight from the Worlds to 8th. place in the Laser 4.7 Worlds, a Class where Bojan Ive (CRO) (57kg) and Pietro Collura (FIN) (56kg) have both headed recent Grand Prix ranklists, while João Vidinha (POR) (64kg) went straight to 5th place in his Junior Nationals of full-rig Laser.

And don't forget that half those 100kg Olympic Finn sailors once sailed Optimists!

